ONDO PIZZOFALCONE

14 B 65

26631
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d'ordine 23

8 7 25

NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
95
NAPOLI

B. Prov.
II
95

APPLICATION

DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE.

609133

APPLICATION

DE L'ALGÈBRE

A LA GÉOMÉTRIE,

PAR A. CH. M. POULLET-DELISLE,

Ancien Élève de l'Ecole Polytechnique, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur de Mathématiques au Lycée d'Orléans.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

AN 1809.

R. ISTITUTO ORIENTALE NAPOLI BIBLIOTECA M. RIPA

VITTORIO EMANUELE III BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

Digitized by Google

En publiant cet Ouvrage, fruit de plusieurs années d'enseignement, je suis loin de mettre en doute le mérite de quelques-uns de ceux qui l'ont précédé. Je pense que, le champ de la science étant ouvert à tout le monde, chacun est libre de le parcourir dans le sens qui lui paraît le plus convenable, mais sans avoir le droit de blâmer ceux qui ont pris une antre direction que lui. Je ne m'établirai point juge dans ma propre cause ; je laisse aux lecteurs instruits à assigner à cet Essai la place qui lui convient, et la seule chose que je desire qu'on y reconnaisse, c'est l'intention de me rendre utile. Je n'ai point ambitionné d'être neuf : dans un ouvrage de cette espèce, ce serait sans doute une prétention ridicule. Je n'ai cherché non plus à imiter personne, parce que je crois que la seule manière de réussir est de marcher directement au but, sans regarder si l'on a suivi les erremens des autres, ou si l'on s'en est éloigné.

On pourra s'étonner de ne trouver ici ni la Trigonométrie sphérique, ni la Géométrie à trois dimensions.

Mais d'abord, je crois avoir renfermé sous un petit volume tout ce que l'on peut raisonnablement exiger sur cette partie des jeunes gens qui se présentent aux examens de l'École Polytechnique ; et d'aillenrs je compte publier par la suite la seconde partie, qui contiendra la Trigonométrie sphérique et l'application de l'Algèbre à la Géométrie à trois dimensions, et principalement aux surfaces du second ordre, en suivant littéralement, autant qu'il sera possible, le plan que j'ai suivi ici.

TABLE DES MATIÈRES.

TRIGONOMÉTRIE.

PARAGRAPHE PREMIER. Notions préliminaires, pag. 1
§ II. Des relations qui lient entre elles les différentes lignes trigonométriques relatives à un même arc ou à des arcs différens, 10
§ III. Construction et usage des tables de sinus et de tangentes, 35
§ IV. Usage des lignes trigonométriques pour la résolution des triangles, 48
§ V. Application de la Trigonométrie à différens problèmes,

APPLICATION

DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

PRÉLIMINAIRE, 75

CHAPITRE PREMIER. Des lignes du premier ordre,

§ I. Discussion de l'équation, 84
§ II. Détermination de la ligne droite par des conditions élémentaires; combinaison des lignes droites entre elles, 89
§ III. Application de ce qui précède à la solution de quelques problèmes, et à la démonstration de quelques théorèmes de Géométrie, 96
§ IV. De la construction des quantités algébriques, 109

CHAP. II. Des lignes du second ordre en général.

§ I. Discussion de l'équation générale; division des lignes du second ordre en genres, 116
§ II. Réduction de l'équation générale des courbes du second ordre aux formes les plus simples par la transformation des axes, 126

CHAP. III. De la nature et des propriétés particulières des trois genres de courbes.

§ I. Des courbes qui ont un centre, page 144
Du genre des Ellipses, 145
Du genre des Hyperboles, 183
§ II. Des courbes privées de centre, ou du genre des Paraboles, 209

CHAP. IV. Application de ce qui précède à la résolution de quelques problèmes; construction des équations déterminées.

§ I. Problèmes dépendans des lignes du second ordre, 221
§ II. Construction des équations, 236

APPENDICE. Exemples de la discussion des équations. Identité des courbes du second ordre avec les sections coniques.

Discussion de quelques équations, 247
Identité des courbes du second ordre avec les sections faites par un plan dans un cône quelconque circulaire, 252

Fautes essentielles à corriger.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
15	12	$M'P'$	$M'P''$.
49	3 en rem.	$\frac{\sin A}{\sin A}$	$\frac{\sin A}{\cos A}$.
51	15	$\cos(b-a)$	$\log(b-a)$.
61	8 en rem.	11,1798789	12,1798789.
	5 en rem.	2,1798798	2,1798789
69	18	150° 51′	151° 50′.
74	2	$\frac{p'}{P} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$	$\frac{p'}{P}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.
	5	$\frac{p'}{P}$	$\frac{p'}{P}$.
81	3	$\cos\alpha$	$\cos\beta$.
85	9 en rem.		renversez la fraction.
89	3		*Idem.*
116	8	Cy^2	Cx^2.
119	4 en rem.	$-B^2$	$-H^2$.
122	2	$-H$	$+H$.
	8 en rem.	AB^2	Ab^2.
128	17	de l'axe	de la parallèle à l'axe.
152	10	$+\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$	$=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$.
154	16	AP	NP.
157	6 en rem.	a^2-b^2	$(a^2-b^2)^2$.
164	10 en rem.	$a^2qx'+b^2py'=a^2b^2$	$a^2qy'+b^2px'=a^2b^2$.
167	12	$y=-$	$y=$.
169	11	$A'=$(et au dénomin.)m^2t'.	$A'=-$ (et) m^2u'.
175	6	m^2u	m^2u^2.
177	5	$\cos^2\varphi$	$\cos\varphi$.
	6 en rem.	*coupent*	*touchent.*
191	16	$S''AS$	$S''AS'''$.
219	4 en rem.	mMF	mMN.
253	3	génératrice	directrice.
254	13 en rem.	BK	EK.

TRIGONOMÉTRIE.

PARAGRAPHE PREMIER.

Notions préliminaires.

1. DANS l'acception exacte du mot, la *Trigonométrie* est la mesure des triangles; mais elle a emprunté ce nom du but vers lequel avaient été d'abord dirigées les considérations qu'elle renferme, et il est arrivé, comme dans presque toutes les parties des sciences, que ce qui la composait en entier n'en est devenu qu'une application particulière : et même, à proprement parler, la Trigonométrie, très-bornée dans ses élémens, très-féconde dans ses applications, ne devrait être qu'un chapitre de l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie.*

Le véritable but de la *Trigonométrie* est de parvenir à faire entrer les angles dans le calcul, en substituant à leur place des lignes choisies convenablement.

2. Supposons (*fig.* 1) qu'autour du point *O* de la ligne *A'A*, on fasse, au moyen des droites *Om*, *Om'*, etc., les angles *AOm*, *AOm'*, etc., et qu'à la distance fixe *OA* on élève sur *A'A* la perpendiculaire indéfinie *AT*. Cette perpendiculaire coupera chacune des lignes *Om*, *Om'*, etc., et les parties *Am*, *Am'*, etc. seront déterminées dès que les angles seront connus, et réciproquement. Si l'on suit la marche simultanée des angles et des parties de la perpendiculaire, on voit que ces dernières augmentent à mesure que les angles augmentent eux-mêmes, mais que leur accroissement est beaucoup plus

rapide que celui des angles et même illimité; ensorte que lorsque l'angle AOm est droit, la ligne Am est plus grande qu'aucune quantité assignable, puisque Om devient alors OB parallèle à AT. Lorsque l'angle AOm devient obtus, la ligne Om ne rencontre plus AT en-dessus de AA', mais en-dessous, comme il arrive pour l'angle AOm'', dont le côté Om'' prolongé rencontre en μ le prolongement de AT. Il est clair d'ailleurs que la partie $A\mu$ décroît à mesure que l'angle croît, jusqu'à ce qu'elle devienne zéro, ce qui arrive quand Om'' se confond avec OA'.

Or il est aisé de prouver que l'opposition de direction se manifeste dans le calcul par l'opposition de signe. En effet, soit le point fixe A et les deux points M et M' (*fig.* 2); que B soit un autre point fixe dont la distance au point A soit a; snpposons d'ailleurs que la distance AM soit égale à la distance AM'; on aura

$$BM = a + AM, \quad BM' = a - AM' = a - AM;$$

partant si l'on veut comprendre dans une seule expression les distances du point B aux points M, M', il faut, pour passer de l'une à l'autre, changer le signe de AM. Donc si la distance du point A au point M est regardée comme positive, la distance du point A au point M' sera négative.

En appliquant cette remarque aux parties Am, Am', etc. $A\mu$, on voit que si l'on suppose les premières positives, $A\mu$ sera négative. De sorte qu'une valeur donnée de Am appartiendra à un angle aigu ou à un angle obtus, suivant que cette valeur sera affectée du signe + ou du signe —.

Si l'on obtient donc d'une manière quelconque la valeur de Am correspondante à un angle donné AOm, on pourra faire entrer dans le calcul la ligne Am au lieu de l'angle AOm, pourvu que l'on puisse réciproquement retrouver l'angle correspondant à une valeur donnée de Am. C'est à quoi l'on parviendra, si, regardant la distance OA comme constante, on forme une Table qui contienne les valeurs de Am pour tous

les angles possibles depuis zéro jusqu'à l'angle droit, puisque l'angle obtus fournit pour Am la même valeur, au signe près, que son *supplément*.

3. Mais on peut remarquer que si du point O (*fig.* 3), comme centre, et du rayon OA, on décrit une circonférence, la ligne AT lui sera tangente, et par conséquent les différentes lignes Am, Am', etc. sont les parties de la tangente comprises entre le rayon qui lui est perpendiculaire, ou le côté commun à tous les angles, et le rayon qui passe par l'extrémité des arcs qui servent de mesnre aux angles AOm, AOm', etc. C'est de là que les lignes Am, Am', etc. ont pris le nom de *tangentes trigonométriques* des angles AOM, AOM', etc. ou des arcs AM, AM', etc. et les lignes Om, Om', etc. celui de *sécantes trigonométriques*.

En introduisant le cercle dans nos considérations, nous ne changeons absolument rien à la nature des lignes Am, Am', etc.; il en résulte seulement pour elles une dénomination assez naturelle et une extension d'usage, puisque d'après la liaison intime des angles et des arcs de cercle, on peut également faire entrer les tangentes dans le calcul, comme appartenant à des angles ou à des arcs de cercle. Mais il en résulte encore que nous appercevons une autre espèce de lignes qui peuvent servir au même usage que les tangentes; ces lignes sont les perpendiculaires MP, MP', etc. abaissées des différens points M, M', etc. sur le diamètre constant $A'A$, et l'on peut former avec elles une Table comme avec les tangentes: on les nomme *sinus* des angles ou des arcs.

4. Si l'on suit la marche des sinus, comme on a suivi celle des tangentes, on verra sans peine que le sinus d'un arc ou d'un angle nul est nul lui-même, qu'à mesure que l'arc augmente le sinus augmente, jusqu'à ce que l'arc devienne égal au quart de la circonférence dont le sinus est égal au rayon; mais ensuite le sinus commence à diminuer, et il passe dans ses décroissemens par tous les degrés où il a déjà passé. Comme il reste toujours positif, il est clair que la connaissance du

sinus seul ne suffit pas pour déterminer l'angle entièrement, puisque le même sinus appartient évidemment à un angle et à son supplément. Nous verrons plus bas comment on peut achever de déterminer l'angle.

5. Quoiqu'on ne puisse, à la rigueur, considérer d'angles plus grands que la somme de deux angles droits, on peut avoir des arcs plus grands que la demi-circonférence; ce que nous avons dit (n° 2) sur les tangentes des angles aigus ou obtus, s'applique aux arcs qui ne surpassent pas la demi-circonférence, il nous reste à suivre la marche des sinus et des tangentes pour les arcs plus grands que la demi-circonférence. On reconnaît avec la plus grande facilité que, pour les arcs compris entre la moitié et les trois quarts de la circonférence, les sinus croissent en même temps que l'arc, de sorte que le sinus de la demi-circonférence est nul; que celui des trois quarts est égal au rayon. Pour les arcs compris entre les trois quarts et la circonférence, les sinus décroissent pendant que les arcs croissent, de sorte que tout se passe comme dans la première moitié de la circonférence; mais il faut bien remarquer que la direction des sinus étant opposée, ils doivent être négatifs pour les arcs plus grands que la demi-circonférence. D'où l'on peut conclure que deux arcs ont même sinus, lorsque, pris ensemble, ils forment la demi-circonférence; et qu'ils ont même sinus, au signe près, lorsqu'ils diffèrent entre eux de la demi-circonférence, ou que leur somme est égale à la circonférence.

Quant aux tangentes, on voit de même que les arcs compris entre la moitié et les trois quarts de la circonférence ont leur tangente positive, pourvu que l'on fasse attention que pour l'arc $ABA'M''$, par exemple, ce n'est que le prolongement du rayon OM'' qui rencontre la perpendiculaire AT; les arcs compris entre les trois quarts de la circonférence et la circonférence entière ont leur tangente négative : généralement, deux arcs ont rigoureusement même tangente lorsqu'ils diffèrent entre eux de la demi-circonférence; et ils ont même

tangente, au signe près, lorsque leur somme est égale à la demi-circonférence, ou à la circonférence entière.

Si l'on représente par π la demi-circonférence, par r le rayon, et par $\sin A$, $\operatorname{tang} A$ le sinus et la tangente d'un arc A, on aura donc, en vertu de ce qui précède,

$$\sin 0 = 0, \quad \operatorname{tang} 0 = 0$$
$$\sin \frac{\pi}{2} = r, \quad \operatorname{tang} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$$
$$\sin \pi = 0, \quad \operatorname{tang} \pi = 0$$
$$\sin \frac{3\pi}{2} = -r, \quad \operatorname{tang} \frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{0}$$

$$\sin(\pi - a) = \sin a, \quad \operatorname{tang}(\pi - a) = -\operatorname{tang} a$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin a, \quad \operatorname{tang}(\pi + a) = \operatorname{tang} a$$
$$\sin(2\pi - a) = -\sin a, \quad \operatorname{tang}(2\pi - a) = -\operatorname{tang} a.$$

On considère même quelquefois des arcs plus grands que la circonférence, ou plus grands qu'un certain nombre de fois la circonférence; mais il est évident que le sinus et la tangente sont les mêmes pour l'arc proposé, et pour celui dont il excède la circonférence ou un multiple de la circonférence; de sorte qu'on a en général, k étant un nombre quelconque entier,

$$\sin(2k\pi + a) = \sin a, \quad \operatorname{tang}(2k\pi + a) = \operatorname{tang} a,$$

et si l'on observe que $(2k+1)\pi = 2k\pi + \pi$, on aura de même généralement

$$\sin\{(2k+1)\pi + a\} = -\sin a,$$
$$\operatorname{tang}\{(2k+1)\pi + a\} = \operatorname{tang} a;$$

et comme $2k\pi - a = 2(k-1)\pi + 2\pi - a$, et $(2k+1)\pi - a = 2k\pi + \pi - a$,

$$\sin(2k\pi - a) = -\sin a, \quad \operatorname{tang}(2k\pi - a) = -\operatorname{tang} a;$$
$$\sin\{(2k+1)\pi - a\} = \sin a,$$
$$\operatorname{tang}\{(2k+1)\pi - a\} = -\operatorname{tang} a.$$

6. Le raisonnement par lequel nous avons prouvé (n° 2) que les distances directement opposées sont de signes contraires, s'appliquerait également aux arcs de cercle, de sorte que par rapport au point A, si l'on regarde l'arc AM comme positif, l'arc AM' situé sur la demi-circonférence inférieure devra être regardé comme négatif. Cela posé, la valeur du sinus et de la tangente d'un arc négatif $-a$ est identiquement la même que celle du sinus et de la tangente de l'arc $2\pi - a$, c'est-à-dire qu'on a en général

$$\sin(-a) = -\sin a, \qquad \text{tang}(-a) = -\text{tang}\, a.$$

7. Nous avons déjà fait remarquer (n° 4) que la connaissance du sinus ne suffit pas pour déterminer entièrement l'arc auquel il appartient; mais si l'on considère les distances OP, OP', etc. du centre au pied du sinus, on verra que pour l'arc nul la distance OP est égale au rayon; qu'à mesure que l'arc augmente, cette distance diminue jusqu'à ce que l'arc soit égal à $\frac{\pi}{2}$, pour lequel elle est nulle. Si l'arc continue d'augmenter, la distance OP augmente de plus en plus, et devient enfin une seconde fois égale au rayon; mais comme, dans ce cas, elle est dans une direction opposée, elle est négative. Quand l'arc surpasse la demi-circonférence, la distance OP diminue de nouveau, mais reste toujours négative; elle est nulle pour l'arc $\frac{3\pi}{2}$, et recommemce ensuite à augmenter positivement, jusqu'à ce qu'elle devienne encore égale au rayon pour l'arc 2π; de sorte que cette distance est la même pour deux arcs qui, pris ensemble, forment la circonférence, et qu'elle est la même, au signe près, pour deux arcs dont la somme ou la différence est égale à la demi-circonférence. D'ailleurs, pour les arcs compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, MP et OP sont tous deux positifs; pour les arcs compris

entre $\frac{\pi}{2}$ et π, MP est positif, et OP négatif; pour les arcs compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$, MP et OP sont tous deux négatifs; enfin, pour les arcs entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, MP est négatif et OP positif. Donc l'arc AM est entièrement déterminé, si l'on connaît la valeur du sinus et le signe de la distance OP, ou le signe de MP et la valeur de OP, au moins pour les arcs plus petits que la circonférence.

On voit facilement que la distance OP est toujours égale, abstraction faite du signe, à la perpendiculaire MQ abaissée du point M sur le diamètre BB', c'est-à-dire, au sinus de l'arc BM, si l'on concevait cet arc rapporté à l'origine A. Or on appelle *cosinus* d'un arc le sinus du *complément* de cet arc; et comme le complément d'un arc est ce qui reste lorsqu'on le retranche du quart de la circonférence, il s'ensuit que le complément est positif ou négatif, suivant que l'arc est plus petit ou plus grand que $\frac{\pi}{2}$. Si donc nous désignons par cos A le cosinus d'un arc quelconque A, nous aurons généralement

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(-a)=-\sin a.$$

Il résulte de là que, quelque part que se trouve le point M sur la circonférence, le cosinus de l'arc AM est égal à la distance OP et de même signe. En effet, si le point M se trouve entre A et B, le cosinus sera positif et égal à MQ; si le point M est entre B et A', en M'', par exemple, on aura $AM''=\frac{\pi}{2}+BM''$, cos AM'' sera par conséquent égal à $-\sin BM''$, et comme l'arc BM'' est plus petit que $\frac{\pi}{2}$, son sinus sera positif; donc cos AM'' sera négatif et égal d'ailleurs à la perpendiculaire $M''Q'$. On reconnaîtra de même que le co-

sinus est négatif, quand le point M se trouve entre A' et B'; qu'il est positif, quand le point M se trouve entre B' et A, et comme il est toujours égal à la perpendiculaire MQ, on peut en conclure que les distances OP, OP', etc. sont précisément les cosinus des arcs AM, AM', etc.

8. Puisque deux arcs ont même tangente lorsqu'ils diffèrent de la demi-circonférence, la connaissance de la tangente d'un arc ne suffit pas non plus pour déterminer cet arc ; mais en considérant les sécantes Om, Om', etc. (*fig.* 4), on voit que si l'arc est nul la sécante est égale au rayon, qu'elle croît en même temps, mais beaucoup plus rapidement que lui, ainsi que le fait la tangente ; que, comme cette dernière, elle devient infinie quand le point M se trouve en B, c'est-à-dire, quand l'arc est égal à $\frac{\pi}{2}$. Si, l'arc augmentant toujours, le point M se trouve en M', entre B et A', la sécante ne rencontre plus la tangente AT au-dessus du diamètre AA', mais au-dessous. Quoique les sécantes ne soient pas dans ce cas directement opposées aux premières, on peut cependant prouver aussi rigoureusement qu'au n° 2, que les dernières sont négatives. Car si l'on prend un point quelconque C sur le prolongement du rayon OM, on aura

$$Cm = CO + Om.$$

Si l'on prend de même sur le prolongement du rayon OM' un point C' à une distance $OC' = OC$, on aura

$$C'm' = C'O - Om' = CO - Om'.$$

Donc si l'on veut que la même formule algébrique soit applicable aux deux cas, il faudra, pour passer de l'une à l'autre, changer le signe de Om, c'est-à-dire, le signe de la sécante.

On se convaincra de même que la sécante est negative pour les arcs dont l'extrémité tombe entre A' et B', et qu'elle est positive pour ceux dont l'extrémité tombe entre B' et A. D'ailleurs on reconnaîtra aisément que deux arcs ont même

sécante, lorsque leur somme est égale à la circonférence, et même sécante, au signe près, lorsque leur somme, ou leur différence est égale à la demi-circonference.

9. La tangente et la sécante du complément se nomment *cotangente* et *cosécante*. On prouvera facilement : 1°. que la cotangente est de même signe que la tangente ; que la cosécante est de même signe que le sinus ; 2°. que si l'on élève au point B une perpendiculaire BT', les parties Bn, Bn', etc. seront les cotangentes, et les parties On, On', etc. les cosécantes, quant à la grandeur et quant au signe. Comme on ne peut éprouver aucun embarras d'après ce qui a été dit précédemment, nous laisserons au lecteur à faire lui-même ces développemens. Nous avons seulement renfermé dans la table ci-jointe, pour toutes les lignes trigonométriques, les relations indiquées jusqu'à présent, et qui sont analogues à celles du n° 5. Pour compléter cette table, nous y avons fait entrer les lignes trigonométriques des arcs $\frac{\pi}{2}+a$, $\frac{3\pi}{2}+a$, qui se déduisent facilement des autres, puisque $\frac{\pi}{2}+a=\pi-\frac{\pi}{2}+a$ $=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ et $\frac{3\pi}{2}+a=\pi+\frac{\pi}{2}+a$, ou $=2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$.

Nous observerons encore que ce que nous avons dit sur les sinus et tangentes des arcs plus grands que la circonférence, s'applique évidemment à toutes les lignes trigonométriques, de sorte que l'arc qui surpasse la circonférence ou un multiple de la circonférence, a les mêmes lignes trigonométriques que l'arc dont il excède la circonférence ou le multiple de la circonférence. D'après cela, on ne peut éprouver de difficulté, non-seulement à comprendre toutes les formules que renferme cette table, mais encore à la construire soi-même. Il est extrêmement nécessaire de se rendre ces relations familières, car l'usage s'en présente à chaque instant dans la suite.

§ II.

Des relations qui lient entre elles les différentes lignes trigonométriques, relatives à un même arc, ou à des arcs différens.

10. QUAND l'arc est donné, les différentes lignes trigonométriques qui lui appartiennent sont déterminées, ainsi elles sont fonction de cet arc, et par conséquent fonctions les unes des autres; il est facile de trouver les relations qui les lient mutuellement.

1°. Les sinus et le cosinus d'un arc a formant avec le rayon un triangle rectangle dont ce dernier est l'hypoténuse, on a

$$\sin^2 a + \cos^2 a = r^2 \ldots\ldots\ldots (1),$$

r étant le rayon, et $\sin^2 a$, $\cos^2 a$ les quarrés de $\sin a$, $\cos a$ respectivement.

2°. La tangente et le rayon formant avec la sécante un triangle rectangle dont cette dernière est l'hypoténuse, on aura

$$\text{tang}^2 a + r^2 = \text{séc}^2 a \ldots\ldots\ldots (2)$$

3°. D'ailleurs ces deux triangles étant semblables, et ayant pour côtés homologues d'une part $\cos a$, $\sin a$ et r, d'autre part r, $\text{tang}\, a$, $\text{séc}\, a$, il en résulte

$$r \sin a = \cos a \,\text{tang}\, a \ldots\ldots\ldots (3),$$
$$r^2 = \cos a \,\text{séc}\, a \ldots\ldots\ldots (4).$$

4°. Ces relations qui ont lieu entre les lignes qui appartiennent à l'arc a, auront lieu également entre celles qui ap-

partiennent au complément; il suffira d'y changer $\sin a$, $\cos a$, $\tang a$, $\sec a$, en $\cos a$, $\sin a$, $\cot a$, $\operatorname{cosec} a$ respectivement. L'équation (1) reste la même, et les trois autres deviennent

$$\cot^2 a + r^2 = \operatorname{cosec} a \ldots\ldots\ldots (5),$$
$$r \cos a = \sin a \cot a \ldots\ldots (6),$$
$$r^2 = \sin a \operatorname{cosec} a \ldots\ldots (7).$$

Ces équations renferment les relations cherchées; mais puisqu'il y en a sept, et seulement six quantités, deux de ces relations doivent être renfermées dans les autres. En effet, si l'on élève au quarré chacune des équations (3) et (4), et qu'on les retranche, on trouve

$$r^2 (r^2 - \sin^2 a) = \cos^2 a (\sec^2 a - \tang^2 a);$$

ou, comme par l'équation (1), $r^2 - \sin^2 a = \cos^2 a$,

$$r^2 = \sec^2 a - \tang^2 a,$$

ce qui est précisément l'équation (2); on déduirait de même l'équation (5) des équations (1), (6) et (7). Ainsi les équations

$$r \sin a = \cos a \tang a, \quad r \cos a = \sin a \cot a$$
$$r^2 = \cos a \sec a, \qquad r^2 = \sin a \operatorname{cosec} a$$
$$\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$$

expriment toutes les relations qui existent entre les lignes trigonométriques qui appartiennent à l'arc a. On en tire sans peine la valeur de chacune de ces lignes en fonction d'une quelconque des autres. La table II renferme toutes les formules qui en résultent, et avec lesquelles il est aussi nécessaire de se familiariser qu'avec celles de la table I.

Les plus remarquables sont celles que donnent directement les équations

$$\sin^2 a + \cos^2 a = r^2, \; r \sin a = \cos a \tang a, \; r^2 = \cos a \sec a;$$

la première apprend que le *quarré du sinus plus le quarré*

du cosinus est égal au quarré du rayon; la seconde donne

$$\text{tang } a = \frac{r \sin a}{\cos a},$$

c'est-à-dire, que *la tangente est égale au produit du sinus par le rayon divisé par le cosinus.* La troisième donne

$$\text{séc } a = \frac{r^2}{\cos a},$$

c'est-à-dire, que *la sécante est égale au quarré du rayon divisé par le cosinus.* L'équation $r \cos a = \sin a \cot a$ donne aussi

$$\cot a = \frac{r \cos a}{\sin a};$$

donc

$$\text{tang } a \cot a = r^2.$$

La valeur de tang a prouve que la tangente est positive ou négative, suivant que le sinus et le cosinus sont de même signe ou de signe différent; celle de séc a prouve que la sécante est de même signe que le cosinus; enfin l'équation tang a cot $a = r^2$, prouve que la tangente et la cotangente sont toujours de même signe; résultats qui s'accordent avec ce que nous avons vu plus haut (§ I.).

11. Nous remarquerons, en passant, que pour l'arc égal au demi-quart de la circonférence, le sinus est égal au cosinus. Ainsi

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = r^2, \text{ ou } \sin \frac{\pi}{4} = \pm \frac{r}{\sqrt{2}},$$

le double signe qui affecte cette valeur provient de ce que dans l'équation $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, nous ne pouvons pas exprimer que $\sin a = \cos a$, mais que $\sin^2 a = \cos^2 a$; ce qui permet qu'on ait $\pm \sin a = \pm \cos a$, et que $\sin a$ et $\cos a$ soient positifs ou négatifs, les signes étant même indépendans. Pour le cas déterminé dont il s'agit, le sinus et le cosinus sont po-

sitifs ; ainsi l'on a

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{r\sqrt{2}}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}=r, \qquad \operatorname{séc}\frac{\pi}{4}=r\sqrt{2}.$$

Donc, pour la moitié d'un angle droit, *la tangente est égale au rayon*, ce qui était évident par soi-même, et *la sécante est double du sinus ou du cosinus*.

12. Un arc a étant donné, si l'on suppose qu'on l'augmente ou qu'on le diminue d'une certaine quantité, les lignes trigonométriques qui lui appartiennent éprouveront une variation dépendante des lignes trigonométriques relatives à l'arc donné et à l'arc qu'on lui ajoute ou qu'on lui retranche, de sorte qu'il s'établit entre ces quantités des relations que nous allons chercher à déterminer. Mais par le n° précédent, on sait que dès que l'on connaîtra une des lignes trigonométriques, on peut en déduire toutes les autres ; ainsi il suffira de chercher le sinus et le cosinus.

13. PROBLÈME. *Étant donnés les sinus et cosinus de deux arcs, trouver le sinus et cosinus de leur somme.*

Soient les arcs AM, MM', (fig. 5) que nous désignerons par a et b ; si l'on mène le rayon OM, et du point M' la perpendiculaire $M'P'$ sur ce rayon, elle sera évidemment égale au sinus de l'arc MM', et OP' en sera le cosinus. Cela posé, si du point P' on mène $P'p$ perpendiculaire, et $P'q$ parallèle à OA, le sinus $M'P''$ sera divisé en deux parties $M'q$ et qP'', qu'il est facile de calculer séparément, la première au moyen des triangles semblables $M'qP'$ et OPM ; la seconde au moyen des triangles semblables OpP' et OPM.

Les triangles $M'qP'$ et OPM donnent

$$\frac{M'q}{M'P'}=\frac{OP}{OM}, \text{ d'où } M'q=\frac{OP.M'P'}{OM}=\frac{\sin b\cos a}{r};$$

les triangles OpP' et OPM donnent, en observant que $P'p = qP''$,

$$\frac{qP''}{OP'} = \frac{MP}{OM}, \text{ d'où } qP'' = \frac{OP' \cdot MP}{OM} = \frac{\sin a \cos b}{r};$$

donc

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{r}.$$

On trouvera le cosinus, en observant que $OP'' = Op - pP''$, $qP' = pP''$, et que les mêmes triangles semblables donnent

$$\frac{pP''}{M'P'} = \frac{MP}{OM}, \text{ d'où } pP'' = \frac{MP \cdot M'P'}{OM} = \frac{\sin a \sin b}{r}$$

$$\frac{Op}{OP'} = \frac{OP}{OM}, \text{ d'où } Op = \frac{OP' \cdot OP}{OM} = \frac{\cos a \cos b}{r},$$

et partant

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r}.$$

14. PROBLÈME. *Trouver le sinus et le cosinus de la différence de deux arcs.*

Comme on a $a = a - b + b$, les formules du n° précédent donnent

$$r \sin a = \sin(a-b)\cos b + \sin b \cos(a-b)$$
$$r \cos a = \cos(a-b)\cos b - \sin b \sin(a-b),$$

on tire de ces équations, par l'élimination,

$$\sin(a-b) = \frac{r(\sin a \cos b - \sin b \cos a)}{\sin^2 b + \cos^2 b}$$
$$= \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{r}$$

$$\cos(a-b) = \frac{r(\cos a \cos b + \sin a \sin b)}{\sin^2 b + \cos^2 b}$$
$$= \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{r};$$

de sorte que pour passer des formules relatives à la somme à celles qui sont relatives à la différence, il n'y a qu'à faire sin b négatif, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit sur les arcs négatifs.

On peut trouver directement le sinus et le cosinus de la différence de deux arcs, par une construction analogue à celle du n° 13. Soient AM, MM' les arcs donnés (fig. 6); si l'on mène OM, et du point M' la perpendiculaire $M'P'$ sur ce rayon, $M'P'$ et OP' seront respectivement égaux au sinus et au cosinus de l'arc MM'. Menant par le point P' les droites $P'p$ et $P'q$, la première perpendiculaire, la seconde parallèle à OA, le sinus de la différence $M'P'$ sera égal à $qP''-qM'$, le cosinus à $Op+pP''$, et $qP''=P'p$, $pP''=P'q$. Or à l'aide des triangles semblables $M'P'q$, $OP'p$, OPM, on trouve

$$qP''=\frac{\sin a\cos b}{r},\quad qM'=\frac{\sin b\cos a}{r};$$

$$Op=\frac{\cos a\cos b}{r},\quad pP''=\frac{\sin a\sin b}{r};$$

donc, etc.

15. Problème. *Trouver la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs donnés* a *et* b.

On a généralement

$$\text{tang}\,(a\pm b)=\frac{r\sin(a\pm b)}{\cos(a\pm b)};$$

donc

$$\text{tang}\,(a\pm b)=\frac{r(\sin a\cos b\pm\sin b\cos a)}{\cos a\cos b\mp\sin a\sin b};$$

divisant les deux termes de la fraction par $\cos a\cos b$,

$$\text{tang}\,(a\pm b)=\frac{r\left(\frac{\sin a}{\cos a}\pm\frac{\sin b}{\cos b}\right)}{1\mp\frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\cos b}};$$

mais $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\text{tang } a}{r}$, $\frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\text{tang } b}{r}$; donc

$$\text{tang } (a \pm b) = \frac{r^2(\text{tang } a \pm \text{tang } b)}{r^2 \mp \text{tang } a \text{ tang } b}.$$

On trouvera de même,

$$\cot (a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp r^2}{\cot a \pm \cot b};$$

nous ne nous arrêterons pas aux sécantes, qui présentent peu d'utilité, et que l'on trouvera d'ailleurs d'une manière analogue.

16. On suppose ordinairement ces formules applicables à des arcs quelconques, quoiqu'elles n'aient été trouvées que pour des arcs dont la somme est plus petite que le quart de la circonférence; à la vérité, pour chaque cas particulier, on peut imiter la construction du n° 13, et même il est utile de s'y exercer; mais, de la manière suivante, on se convaincra plus simplement de la généralité de ces formules. Nous commencerons par faire remarquer que, comme elles se tirent toutes de celles du n° 13, il suffira de faire voir que les expressions données dans ce numéro pour le sinus et le cosinus de la somme sont vraies, quels que soient les arcs a et b. Cela posé:

1°. Si la somme des arcs a et b est plus grande que $\frac{\pi}{2}$, et moindre que π, $\pi - a - b$ sera plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Or...

$\sin (a+b) = \sin (\pi - a - b) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - b\right)$, et comme on a

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - b\right) = \frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$
$$= \frac{1}{r}(\cos a \sin b + \cos b \sin a),$$

quand même $\frac{\pi}{2} - b$ serait négatif, il s'ensuit que la formule du

sinus s'étend aux arcs dont la somme ne surpasse pas la demi-circonférence.

De même $\cos(a+b) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - b\right)$, et partant

$$\cos(a+b) = -\frac{1}{r}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\right\}$$
$$= -\frac{1}{r}\{\sin a \sin b - \cos a \cos b\} = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r},$$

donc toutes les formules sont vraies pour les arcs dont la somme ne surpasse pas la demi-circonférence.

2°. Si $a+b > \pi$ et $< 2\pi$, on aura $2\pi - a - b < \pi$, d'ailleurs

$$\sin(a+b) = -\sin(2\pi - a - b) = -\sin(\pi - a + \pi - b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(2\pi - a - b) = \cos(\pi - a + \pi - b);$$

partant

$$\sin(a+b) = -\frac{1}{r}\{\sin(\pi-a)\cos(\pi-b) + \sin(\pi-b)\cos(\pi-a)\}$$
$$= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{r};$$

$$\cos(a+b) = \frac{1}{r}\{\cos(\pi-a)\cos(\pi-b) - \sin(\pi-a)\sin(\pi-b)\}$$
$$= \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r};$$

3°. Généralement, si $a+b$ est compris entre $2(m-1)\pi$ et $2m\pi$, on aura $2m\pi - a - b < 2\pi$, et comme

$$\sin(a+b) = -\sin(2m\pi - a - b) = \sin(m\pi - a + m\pi - b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(2m\pi - a - b) = \cos(m\pi - a + m\pi - b);$$

on en conclut

$$\sin(a+b) = -\frac{1}{r}\{\sin(m\pi-a)\cos(m\pi-b) + \sin(m\pi-b)\cos(m\pi-a)\};$$

$$\cos(a+b) = \frac{1}{r}\{\cos(m\pi-a)\cos(m\pi-b) - \sin(m\pi-a)\cos(m\pi-b)\},$$

or (Table I) $\sin(m\pi - a) = \mp \sin a$, $\cos(m\pi - a) = \pm \cos a$, le signe supérieur ayant lieu quand m est pair, et le signe inférieur quand m est impair; donc

$$\sin(a+b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{r};$$

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{r}.$$

17. On déduit facilement des formules précédentes celles qui donnent les sinus, cosinus, tangente d'un arc double d'un arc donné; en effet, on a

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \frac{2 \sin a \cos a}{r} \ldots\ldots (1),$$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{r} \ldots (2),$$

$$\operatorname{tang} 2a = \operatorname{tang}(a+a) = \frac{2r^2 \operatorname{tang} a}{r^2 - \operatorname{tang}^2 a} \ldots\ldots (2).$$

La formule (2) peut, à l'aide de l'équation $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, se présenter sous deux autres formes:

$$\cos 2a = \frac{2\cos^2 a - r^2}{r} \ldots (4), \quad \cos 2a = \frac{r^2 - 2\sin^2 a}{r} \ldots (5).$$

18. Les formules (4) et (5) donnent sur-le-champ la valeur de $\sin a$ et $\cos a$ en fonction de $\cos 2a$, c'est-à-dire, le sinus et le cosinus de la moitié d'un arc; ces valeurs sont:

$$\cos a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(r^2 + r\cos 2a) \ldots\ldots\ldots (6),$$
$$\sin a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(r^2 - r\cos 2a) \ldots\ldots\ldots (7);$$

l'équation (3), réduite et résolue par rapport à $\operatorname{tang} a$, donne

$$\operatorname{tang} a = \frac{r(-r \pm \sqrt{(r^2 + \operatorname{tang}^2 2a)}}{\operatorname{tang} 2a} \ldots\ldots\ldots (8).$$

Les valeurs (6), (7), (8) sont doubles à cause des radi-

caux; il ne s'ensuit cependant pas que les sinus, cosinus, tangente de la moitié d'un arc donné soient susceptibles de deux valeurs différentes, ce qui serait absurde. Mais on doit faire attention que les arcs qui ont même cosinus que l'arc $2a$ sont (Table I) compris sous les deux formes générales $2m\pi + 2a$, $2m\pi - 2a$; donc les moitiés sont $m\pi + a$, $m\pi - a$. Or les sinus et cosinus de la moitié des arcs qui ont même cosinus que $2a$, doivent être donnés par la même équation; donc les équations précédentes doivent donner $\sin(m\pi \pm a)$, $\cos(m\pi \pm a)$. Il ne reste donc qu'à faire voir que ces sinus et cosinus se réduisent chacun à deux égaux et de signe contraire; or c'est ce qui est évident par la Table I, puisque

$$\sin(m\pi - a) = \pm \sin a, \qquad \cos(m\pi - a) = \mp \cos a,$$

suivant que m est impair ou pair, et que

$$\sin(m\pi + a) = \mp \sin a, \qquad \cos(m\pi + a) = \mp \cos a.$$

Ainsi, étant donné un arc par son cosinus, si l'on cherche le sinus de la moitié de l'arc auquel ce sinus appartient, il doit y avoir deux solutions, et les deux plus petits des arcs auxquels elles répondent sont, la moitié de celui qui est plus petit que le quart de la circonférence, et le supplément de cette moitié.

On appliquera facilement à la tangente un raisonnement analogue.

19. On a encore

$$\sin 3a = \sin(2a + a) = \frac{\sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a}{r},$$

$$\cos 3a = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{r},$$

$$\tan 3a = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{r^2(\tan a + \tan 2a)}{r^2 - \tan a \tan 2a}.$$

Attachons-nous principalement aux deux premières; en y

substituant les valeurs trouvées pour $\sin 2a$, $\cos 2a$, on obtient

$$\sin 3a = \frac{1}{r^3}\{\sin a(\cos^2 a - \sin^2 a) + 2\sin a\cos^2 a\}$$

$$= \frac{1}{r^3}(3\sin a\cos^2 a - \sin^3 a),$$

$$\cos 3a = \frac{1}{r^3}\{\cos a(\cos^2 a - \sin^2 a) - 2\sin^2 a\cos a\}$$

$$= \frac{1}{r^3}(\cos^3 a - 3\sin^2 a\cos a);$$

à l'aide de l'équation $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, on peut éliminer $\cos^2 a$ dans la première, et $\sin^2 a$ dans la seconde, elles deviennent

$$\sin 3a = \frac{1}{r^3}\{3r^2\sin a - 4\sin^3 a\},$$

$$\cos 3a = \frac{1}{r^3}\{4\cos^3 a - 3r^2\cos a\};$$

donc, si l'on regardait l'arc $3a$ comme connu, et que l'on cherchât $\sin a$ et $\cos a$, ils seraient donnés l'un et l'autre par une équation du troisième degré.

On trouvera de même

$$\sin 4a = \frac{1}{r^3}\cos a(4r^2\sin a - 8\sin^3 a),$$

$$\cos 4a = \frac{1}{r^3}(r^4 - 8r^2\cos^2 a + 8\cos^4 a),$$

$$\sin 5a = \frac{1}{r^4}(5r^4\sin a - 20r^2\sin^3 a + 16\sin^5 a),$$

$$\cos 5a = \frac{1}{r^4}(5r^4\cos a - 20r^2\cos^3 a + 16\cos^5 a),$$

etc.

d'où l'on voit que le cosinus du quart ou du cinquième d'un arc donné dépend de la résolution d'une équation du quatrième ou du cinquième degré. Quant au sinus, il est donné par une équation du cinquième degré pour la division en cinq

parties ; mais pour la division en quatre parties, on ne pourra chasser $\cos a$ qu'en élevant au quarré et remplaçant ensuite $\cos^2 a$ par $r^2 - \sin^2 a$, ce qui conduirait à une équation du huitième degré, qui est, au reste, réductible au quatrième.

20. Au moyen d'nne indnction dont il est facile de démontrer ensuite la légitimité, on pourrait parvenir aux formules générales pour $\sin ma$ et $\cos ma$; mais nous croyons devoir préférer le moyen suivant, que donne un théorème remarquable par sa simplicité, son élégance et sa fécondité. On y verra un exemple de l'usage des expressions imaginaires dans la recherche des quantités réelles.

Si l'on multiplie l'expression $\cos a + \sqrt{-1}.\sin a$ par... $\cos b + \sqrt{-1}.\sin b$, on trouve pour produit

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b + (\sin a \cos b + \sin b \cos a)\sqrt{-1},$$

ou (Probl. n° 13)

$$r\{\cos(a+b) + \sqrt{-1}.\sin(a+b)\};$$

donc en faisant $b = a$,

$$(\cos a + \sqrt{-1}.\sin a)^2 = r(\cos 2a + \sqrt{-1}.\sin 2a).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\cos a + \sqrt{-1}.\sin a$, on a

$$(\cos a + \sqrt{-1}.\sin a)^3 = r(\cos 2a + \sqrt{-1}.\sin 2a)(\cos a + \sqrt{-1}.\sin a),$$
$$= r^3(\cos 3a + \sqrt{-1}.\sin 3a);$$

de même

$$(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)^4 = r^3(\cos 4a + \sqrt{-1}.\sin 4a),$$

et en général

$$(\cos a + \sqrt{-1}.\sin a)^m = r^{m-1}(\cos ma + \sqrt{-1}.\sin ma).$$

Si l'on développe le premier membre de cette équation, et que l'on rassemble tous les termes réels d'une part, et tous les termes imaginaires de l'autre, elle prendra la forme

$$A + B\sqrt{-1} = r^{m-1}\cos ma + r^{m-1}\sin ma.\sqrt{-1}.$$

Or on prouve en algèbre, que dans une équation qui contient des termes réels et des termes imaginaires, la partie réelle et la partie imaginaire doivent se détruire séparément (*) ; donc on a nécessairement

$$r^{m-1}\cos ma = A, \qquad r^{m-1}\sin ma = B,$$

et développement fait

$$r^{m-1}\cos ma = \cos^m a - m.\frac{m-1}{2}\cos^{m-2}a\sin^2 a + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\cos^{m-4}a\sin^4 a - \text{etc.}$$

$$r^{m-1}\sin ma = m\cos^{m-1}a\sin a - m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\cos m^{m-3}a\sin^3 a + \text{etc.}$$

On voit par ces formnles que $\cos ma$ ne renfermant que des puissances paires de $\sin a$, on peut éliminer cette quantité à l'aide de l'équation $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$: ainsi $\cos ma$ pourra toujours être exprimé en fonction de $\cos a$. Quant à $\sin ma$, on ne pourra en chasser $\cos a$, sans introduire de radicaux, que pour les valeurs impaires de m; mais d'un autre côté, pour les valeurs paires, le développement de $\cos ma$ ne contenant que des puissances paires de $\cos a$, on pourra l'en chasser, et l'on aura ainsi $\cos ma$ exprimé en fonction de $\sin a$. Or comme l'élimination n'altérera pas le degré du polynome, il s'ensuit que si l'on regarde au contraire l'arc ma comme connu, et que l'on fasse $ma = A$, $\sin a$ et $\cos a$ seront donnés dans tous les cas par une équation de degré m.

21. Comme une équation de degré m a m racines, nous

(*) En effet, toute équation de cette espèce peut être représentée par

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1},$$

a, a', b, b' étant des quantités réelles. Or si l'on n'avait pas $a=a'$, $b=b'$, on aurait $a - a' = (b' - b)\sqrt{-1}$; c'est-à-dire, que la différence de deux quantités réelles serait imaginaire, ce qui est absurde.

allons examiner quelles sont ces racines, et quelle est celle qui donne le sinus de la $m^{ième}$ partie de l'arc A. Pour simplifier cette recherche, nous supposerons que l'arc A ne soit pas $> \frac{\pi}{2}$.

Supposons m impair; ce sera $\sin ma$ qui sera donné en fonction de $\sin a$, ou $\sin A$ en fonction de $\sin \frac{A}{m}$; donc en faisant $\sin A = q$, l'équation devra donner le sinus de la $m^{ième}$ partie de tous les arcs qui ont q pour sinus. Or ces arcs sont compris dans les deux formules générales

$$2k\pi + A, \qquad (2k+1)\pi - A;$$

donc les arcs dont les sinus doivent être donnés par l'équation sont eux-mêmes compris dans les formules

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{A}{m}, \qquad \frac{(2k+1)\pi}{m} - \frac{A}{m}.$$

Mais si l'on fait $k = mh + k'$, k' étant $< m$, ce qui est toujours possible, les formules précédentes deviendront

$$2h\pi + \frac{2k'\pi}{m} + \frac{A}{m}, \qquad 2h\pi + \frac{(2k'+1)\pi}{m} - \frac{A}{m},$$

arcs qui ont même sinus que

$$\frac{2k'\pi}{m} + \frac{A}{m}, \qquad \frac{(2k'+1)\pi}{m} - \frac{A}{m};$$

ainsi tous les arcs dont les sinus peuvent être donnés par l'équation se trouvent déjà réduits aux suivans :

$$\frac{A}{m}, \frac{2\pi}{m} + \frac{A}{m}, \frac{4\pi}{m} + \frac{A}{m}, \ldots \frac{2(m-1)\pi}{m} + \frac{A}{m} \ldots (1),$$

$$\frac{\pi}{m} - \frac{A}{m}, \frac{3\pi}{m} - \frac{A}{m}, \frac{5\pi}{m} - \frac{A}{m}, \ldots \frac{(2m-1)\pi}{m} - \frac{A}{m} \ldots (2).$$

Or on peut se convaincre encore que les arcs de la seconde ligne

ont mêmes sinus que ceux de la première. Soit en effet $\frac{2\alpha\pi}{m}+\frac{A}{m}$ un arc quelconque de la première ligne, $\frac{(2\beta+1)\pi}{m}-\frac{A}{m}$ un arc de la seconde; ces arcs seront tous deux plus petits que la circonférence, du moins tant qu'on n'a pas $A>2\pi$, puisque le dernier de la ligne (1), qui est le plus grand de cette ligne, est $2\pi-\frac{2\pi-A}{m}$, et que le dernier, c'est-à-dire, le plus grand de la ligne (2) est $2\pi-\frac{\pi+A}{m}$. Ainsi les arcs $\frac{2\alpha\pi}{m}+\frac{A}{m}$, $\frac{(2\beta+1)\pi}{m}-\frac{A}{m}$ ne peuvent avoir même sinus que si leur somme est égale à π ou à 3π, ce qui donne les conditions

$$\alpha+\beta=\frac{m-1}{2}, \quad \text{ou} \quad \alpha+\beta=\frac{3m-1}{2};$$

il ne s'agit donc que de voir si, quelque valeur que l'on attribue à α, on peut toujours déterminer β de manière à satisfaire à l'une des conditions. Or si α n'est pas plus grand que $\frac{m-1}{2}$, on pourra trouver une valeur de β qui satisfasse à la première; si α est $>\frac{m-1}{2}$, on pourra satisfaire à la seconde, et comme $\alpha<m$, la plus petite valeur de β sera plus grande que $\frac{m-1}{2}$, ainsi aucune des valeurs de β qui satisfera à la première équation ne satisfera à la seconde, et réciproquement; donc pour différentes valeurs de α on aura des valeurs différentes de β; donc enfin pour une valeur donnée de α, on pourra trouver dans la seconde ligne un arc qui ait même sinus que l'arc $\frac{2\alpha\pi}{m}+\frac{A}{m}$, et on n'en trouvera qu'un. Partant, les sinus des arcs de la seconde ligne sont identiquement les mêmes que ceux des arcs de la pre-

mière, et la première renferme tous les arcs dont les sinus doivent être donnés par l'équation. Or tous ces arcs sont différens, du moins en général; en effet pour que deux d'entre eux, $\frac{2\alpha\pi}{m}+\frac{A}{m}$, $\frac{2\alpha'\pi}{m}+\frac{A}{m}$, eussent même sinus, il faudrait, comme plus haut, que leur somme fût π ou 3π, ce qui donne

$$2(\alpha+\alpha')\pi+2A=m\pi, \quad \text{ou} \quad =3m\pi,$$

équations qui ne peuvent avoir lieu, à moins que $2A$ ne soit un multiple de π, et partant A un multiple de $\frac{\pi}{2}$. Donc, dans tout autre cas, les arcs de la ligne (1) auront des sinus différens; comme d'ailleurs ils sont en nombre m, et donnés par une équation du degré m, *cette équation aura toutes ses racines réelles et inégales.*

Les arcs compris depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{m-1}{2}$ inclusivement, sont plus petits que π, car le plus grand d'entre eux, c'est-à-dire, celui qui correspond à $\alpha=\frac{m-1}{2}$ est

$$\frac{(m-1)\pi}{m}+\frac{A}{m}=\pi-\frac{\pi-A}{m};$$

ainsi leurs sinus sont positifs. Au contraire les arcs compris depuis $\alpha=\frac{m+1}{2}$ jusqu'à $\alpha=m-1$ (inclusivement) sont plus grands que π, car le plus petit, qui correspond à $\alpha=\frac{m+1}{2}$, est

$$\frac{(m+1)\pi}{m}+\frac{A}{m}=\pi+\frac{\pi+A}{m};$$

et comme ces arcs ne sont pas plus grands que la circonférence, leurs sinus sont négatifs. Or il y a $\frac{m+1}{2}$ nombres depuis 0 jusqu'à $\frac{m-1}{2}$ inclusivement, et $\frac{m-1}{2}$ depuis $\frac{m+1}{2}$

jusqu'à $m-1$; donc, *le nombre des racines positives de l'équation surpasse d'une unité celui des racines négatives.*

Il ne nous reste plus qu'à comparer la grandeur des racines à celle des arcs auxquels elles appartiennent, afin de pouvoir distinguer la racine qui appartient à un arc déterminé. Or pour juger de la grandeur des sinus d'après la grandeur des arcs, il faut que les extrémités des arcs que l'on compare se trouvent sur un même quart de cercle. Cela posé, l'arc $\frac{2\alpha\pi}{m}+\frac{A}{m}$ sera $<\frac{\pi}{2}$, si $\alpha<\frac{m}{4}-\frac{A}{2\pi}$; il sera $<\frac{3\pi}{2}$, si $\alpha<\frac{3m}{4}-\frac{A}{2\pi}$. Nous distinguerons deux cas, suivant que m est de la forme $4n+1$ ou $4n+3$.

1°. Si $m=4n+1$, la condition $\alpha<\frac{m}{4}-\frac{A}{2\pi}$ devient

$$\alpha<n+\frac{\pi-2A}{4\pi};$$

ainsi, comme $2A<\pi$, on peut prendre $\alpha=n$ ou $<n$; c'est-à-dire, que tous les arcs compris depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=n$ sont plus petits que $\frac{\pi}{2}$, et que les arcs compris depuis $\alpha=n+1$ jusqu'à $\alpha=2n=\frac{m-1}{2}$ sont plus grands que $\frac{\pi}{2}$. Or, d'après ce que nous avons vu plus haut, les sinus de ces derniers arcs sont les mêmes que ceux de la ligne (2) compris entre $\beta=n-1$ et $\beta=0$ respectivement, et comme les arcs correspondans aux valeurs de β $0, 1 \ldots n-1$, sont évidemment plus petits que $\frac{\pi}{2}$, les racines de l'équation sont donc les sinus d'une suite d'arcs compris dans le premier quart de cercle, qui sont

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{m}, \frac{2\pi+A}{m}, \frac{4\pi+A}{m}, \ldots \frac{2(n-1)\pi+A}{m}, \frac{2n\pi+A}{m}; \\ \frac{\pi-A}{m}, \frac{3\pi-A}{m}, \frac{5\pi+A}{m}, \ldots \frac{(2n-1)\pi+A}{m}; \end{array}\right\} \quad (3)$$

Parmi les arcs (3), il est clair que la différence de l'un des arcs de la ligne inférieure à celui qui lui répond dans la ligne supérieure est constante, égale à $\frac{\pi - 2A}{m}$, et par conséquent positive. D'ailleurs un arc quelconque de la ligne supérieure est évidemment plus grand que l'arc qui le précède dans la ligne inférieure; donc si, pour abréger, nous désignons par a, a'', a^{iv}, $\ldots a^{2(n-1)}$, a^{2n} les arcs de la ligne supérieure, par a', a''', a^{v}, $\ldots a^{2n-1}$ les arcs de la ligne inférieure, ces arcs sont disposés par ordre de grandeur, de la manière suivante :

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots\ldots a^{2(n-1)},\ a^{2n-1},\ a^{2n};$$

ainsi *le sinus de l'arc* $\frac{A}{m}$ *est la plus petite racine positive de l'équation.*

Nous pourrions arriver à un résultat analogue pour les sinus négatifs, à l'aide de la condition $\alpha < \frac{3m}{4} - \frac{A}{2\pi}$, mais nous supprimons ce détail, qui deviendrait inutile; car, pour chaque cas particulier, on peut disposer les arcs et les racines par ordre de grandeur, et partant assigner l'ordre suivant lequel les racines doivent leur être distribuées. Il était seulement nécessaire de faire voir, comme ci-dessus, que le sinus de $\frac{A}{m}$ était en général la plus petite racine.

2°. Si $m = 4n + 3$, la condition $\alpha < \frac{m}{4} - \frac{A}{2\pi}$ devient

$$\alpha < n + \frac{3\pi - 2A}{4\pi};$$

et comme on a certainement $2A < 3\pi$, on pourra prendre $\alpha = n$ ou $< n$; d'où l'on tire facilement la même conclusion que pour le premier cas.

Nous ne traiterons pas le cas où m est pair, quoique l'on puisse en tirer des résultats semblables. Car il est évident que

pour diviser un arc en $2n$ parties, on peut commencer par chercher le sinus de la moitié, et ensuite diviser cette moitié en n parties égales, en opérant de même, si n est pair, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à une division impaire qui se rapporte aux précédens.

22. Nous avons vu, dans le n° précédent, que les sinus des arcs de la ligne (1) ne sont pas tous différens, quand A est un multiple de $\frac{\pi}{2}$: comme nous supposons A non $> \frac{\pi}{2}$, nous ferons $2A = \pi$, et les équations

$$2(\alpha+\alpha')\pi + 2A = m\pi, \quad \text{ou} \quad = 3m\pi$$

deviendront

$$\alpha+\alpha' = \frac{m-1}{2}, \qquad \alpha+\alpha' = \frac{3m-1}{2}.$$

Or m peut être de la forme $4n+1$, ou de la forme $4n+3$.

1°. Si $m = 4n+1$, on aura

$$\alpha+\alpha' = 2n, \qquad \alpha+\alpha' = 6n+1:$$

en faisant dans la première $\alpha = n$, on a aussi $\alpha' = n$; mais pour toute autre valeur de α, cette équation fournira une valeur différente de α'. Donc, parmi les arcs qui répondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots 2n$ de α, un seul aura son sinus différent de celui de tout autre arc, et c'est l'arc

$$\frac{4n\pi+\pi}{2m} = \frac{\pi}{2},$$

dont le sinus est r; quant aux autres, ils auront deux à deux même sinus. Dans la seconde équation, la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à α est $2n+1$, puisque $4n$ est la plus grande que α' puisse recevoir; comme d'ailleurs on ne peut y faire $\alpha = \alpha'$, il s'ensuit que tous les arcs compris depuis $\alpha = 2n+1$ jusqu'à $\alpha = m-1$ ont deux à deux même sinus.

2°. Si $m=4n+3$, on aura

$$\alpha+\alpha'=2n+1, \qquad \alpha+\alpha'=6n+4;$$

d'où l'on conclura facilement qu'au contraire tous les arcs compris depuis $\alpha=0$ jnsqu'à $\alpha=2n+1$, ont deux à deux même sinus, et que comme la seconde équation admet la solntion $\alpha=\alpha'=3n+2$, parmi les arcs que donnent les valeurs $\alpha=2n+2$, $2n+3,\ldots m-1$, un seul aura son sinus différent de tous les autres. Cet arc est

$$\frac{2(6n+4)\pi+\pi}{2m}=\frac{3\pi}{2},$$

dont le sinus est $-r$.

Ainsi lorsque $A=\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, lorsque l'arc donné est le quart de la circonférence, l'équation a une racine simple égale à $+r$ ou à $-r$, suivant que m est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+3$, et toutes les autres racines sont doubles. Donc enfin, *l'équation est divisible par* $x-r$ *ou par* $x+r$, *et le quotient est un quarré*, et partant elle peut se rabaisser au degré $\frac{m-1}{2}$.

Cette circonstance particulière exceptée, tout ce que nous avons démontré au n° précédent a lieu également ici.

23. Les formules des numéros 13 et suivans conduisent à des relations qui sont d'une grande utilité dans les calculs trigonométriques; nous allons faire voir comment on peut les en déduire.

1°. Les valeurs

$$\sin(a+b)=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{r},$$

$$\sin(a-b)=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{r},$$

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{r},$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a\cos b+\sin a\sin b}{r},$$

donnent sur-le-champ

$$\left.\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= \frac{2\sin a\cos b}{r}\\
\sin(a+b) - \sin(a-b) &= \frac{2\sin b\cos a}{r}\\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= \frac{2\cos a\cos b}{r}\\
\cos(a-b) - \cos(a+b) &= \frac{2\sin a\sin b}{r}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (\mathrm{I}),$$

formules qui servent à transformer des produits de sinus et cosinus en sommes ou différences de ces mêmes lignes.

2°. Si l'on fait $a+b=p$, $a-b=q$, on aura $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$; substituant ces valeurs dans les équations précédentes, elles deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= \frac{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}{r}\\
\sin p - \sin q &= \frac{2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}{r}\\
\cos p + \cos q &= \frac{2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}{r}\\
\cos q - \cos p &= \frac{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{r}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (\mathrm{II}),$$

formules qui servent à transformer des sommes ou des différences de sinus et de cosinus en produits des mêmes lignes.

3°. Si l'on divise les équations (1) deux à deux l'une par l'autre, on trouve, en ne prenant que les résultats essentiel-

lement différens,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}=\frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\tang a\,.\cot b}{r^2}=\frac{\tang a}{\tang b}\\
&\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\tang a}{r}\\
&\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)}=\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\cot b}{r}\\
&\frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\tang b}{r}\\
&\frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)}=\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{\cot a}{r}\\
&\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{\tang a\,.\tang b}{r^2}
\end{aligned}\right\}\text{(III),}$$

et partant, 4°.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\tang\left(\frac{p+q}{2}\right).\cot\left(\frac{p-q}{2}\right)}{r^2}=\frac{\tang\frac{p+q}{2}}{\tang\left(\frac{p-q}{2}\right)}\\
&\frac{\sin p+\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\tang\frac{p+q}{2}}{r}\\
&\frac{\sin p+\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cot\frac{p-q}{2}}{r}\\
&\frac{\sin p-\sin q}{\cos p+\cos q}=\frac{\tang\frac{p-q}{2}}{r}\\
&\frac{\sin p-\sin q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cot\frac{p+q}{2}}{r}\\
&\frac{\cos q-\cos p}{\cos q+\cos p}=\frac{\tang\frac{p+q}{2}\,.\tang\frac{p-q}{2}}{r^2}\\
&\qquad=\frac{\tang\frac{p+q}{2}}{\cot\frac{p-q}{2}}=\frac{\tang\frac{p-q}{2}}{\cot\frac{p+q}{2}}
\end{aligned}\right\}\text{..(IV).}$$

5°. En observant que $\sin A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$, et que $\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$, on a encore

$$\left.\begin{aligned} \sin p + \cos q &= \frac{2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+p-q\right).\cos\frac{1}{2}\left(p+q-\frac{\pi}{2}\right)}{r} \\ \sin p - \cos q &= \frac{2\sin\frac{1}{2}\left(p+q-\frac{\pi}{2}\right).\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+p-q\right)}{r} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (V).$$

d'où

$$\frac{\sin p + \cos q}{\sin p - \cos q} = \frac{\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+p-q\right)}{\tan\frac{1}{2}\left(p+q-\frac{\pi}{2}\right)}$$

6°. Pour les sommes ou différences de tangentes ou de cotangentes,

$$\left.\begin{aligned} \tan a \pm \tan b &= \frac{r(\sin a\cos b \pm r\sin b\cos a)}{\cos a\cos b} = \frac{r^2\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b} \\ \cot a \pm \cot b &= \frac{r(\sin b\cos a \pm \sin a\cos b)}{\sin a\sin b} = \frac{r^2\sin(b\pm a)}{\sin a\sin b} \\ \tan a \pm \cot b &= \frac{r(\sin a\sin b \pm \cos a\cos b)}{\cos a\sin b} = \pm\frac{r^2\cos(b\mp a)}{\cos a\sin b} \\ \frac{\tan a - \cot b}{\tan a + \cot b} &= -\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = -\frac{\sec(a-b)}{\sec(a+b)} \end{aligned}\right\} \ldots (VI).$$

7°. Si l'on suppose dans ces différentes formules que les arcs soient égaux, un grand nombre se réduit à des équations identiques, les autres donnent, savoir, les formules (I),

$$\sin 2a = \frac{2\sin a\cos a}{r},\quad \cos 2a + r = \frac{2\cos^2 a}{r},\quad r - \cos 2a = \frac{2\sin^2 a}{r},$$

formules déjà connues; les formules (III),

$$\frac{\sin 2a}{r+\cos 2a} = \frac{\tan a}{r},\qquad \frac{\sin 2a}{r-\cos 2a} = \frac{\cot a}{r},$$

$$\frac{r-\cos 2a}{r+\cos 2a}=\frac{\operatorname{tang}^2 a}{r^2};$$

les formules (V),

$$\sin p+\cos p=\cos\left(p-\frac{\pi}{4}\right).\sqrt{2},$$

$$\sin p-\cos p=\sin\left(p-\frac{\pi}{4}\right).\sqrt{2},$$

$$\frac{\sin p-\cos p}{\sin p+\cos p}=\frac{\operatorname{tang}\left(p-\frac{\pi}{2}\right)}{r}=\frac{\operatorname{tang} p-r}{\operatorname{tang} p+r};$$

enfin les formules (VI),

$$\operatorname{tang} a+\cot a=\frac{2r^2}{\sin 2a}=2\operatorname{cosec} 2a$$

$$\operatorname{tang} a-\cot a=-\frac{2r\cos 2a}{\sin 2a}=-2\cot 2a,$$

d'où..... $\dfrac{\operatorname{tang} a-\cot a}{\operatorname{tang} a+\cot a}=-\dfrac{\cos 2a}{r}$.

8°. A l'aide des formules précédentes, on déduit facilement

$$\sin^2 a+\sin^2 b=r^2-\frac{r(\cos 2a+\cos 2b)}{2}$$
$$=r^2-\cos(a+b).\cos(a-b)$$

$$\cos^2 a+\cos^2 b=r^2+\frac{r(\cos 2a+\cos 2b)}{2}$$
$$=r^2+\cos(a+b).\cos(a-b)$$

$$\sin^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\cos^2 a=\frac{(\sin a+\sin b)(\sin a-\sin b)}{r}$$
$$=\sin(a+b.\sin(a-b)$$

$$\sin^2 a+\cos^2 b=r^2-\frac{r(\cos 2a-\cos 2b)}{2}$$
$$=r^2-\sin(a+b)\ \sin(a-b)$$

$$\sin^2 a-\cos^2 b=\sin^2 b-\cos^2 a=-\frac{r(\cos 2a+\cos 2b)}{2}$$
$$=-\cos(a+b)\cos(a-b)$$

$$\sin a \cos a + \sin b \cos b = \frac{r(\sin 2a + \sin 2b)}{2}$$
$$= \sin(a+b)\cos(a-b)$$
$$\sin a \cos a - \sin b \cos b = \sin(a-b)\cos(a+b)$$
$$\tang^2 a - \tang^2 b = \frac{r^4 \sin(a+b)\ \sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$$
$$\cot^2 a - \cot^2 b = \frac{r^4 \sin(a+b).\sin(a-b)}{\sin^2 a \sin^2 b}.$$

En combinant ces formules, on pourrait en trouver un bien plus grand nombre ; mais celles que nous venons de donner sont les plus remarquables et les plus utiles. On ne saurait trop recommander de se les rendre familières, ou du moins d'acquérir l'habitude de les déduire promptement de celles qui se seront gravées plus facilement dans la mémoire. On verra par la suite plusieurs applications de ces changemens de formes, qui ont en général pour but de simplifier la recherche des lignes trigonométriques qui sont inconnues, et qui peuvent être engagées avec d'autres, ou de décomposer une fonction de ces mêmes lignes en facteurs, afin de pouvoir y appliquer les logarithmes.

Nous ferons remarquer particulièrement la relation

$$\frac{\sin p + \sin p}{\sin p - \sin q} = \frac{\tang\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\tang\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

qui fournit l'énoncé du théorème suivant :

La somme des sinus de deux arcs est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la demi-somme des arcs est a la tangente de leur demi-différence.

Ceux qui desireraient connaître plus en détail ce genre de combinaisons, peuvent consulter la *Géométrie* de *Carnot*, et surtout la Trigonométrie de *Cagnoli*.

§ III.

Construction et usage des tables de sinus et de tangentes.

24. Les principes que nous avons exposés dans le § précédent, conduisent naturellement à la construction des tables de sinus. Nous imaginerons d'abord qu'on ait divisé le quart de la circonférence, que nous nommerons *quadrans*, en 100 parties égales qui s'appelleront *degrés*, chaque degré en 100 *minutes*, chaque minute en 100 *secondes*, etc. La circonférence sera composée de 400 degrés; un arc quelconque contiendra un certain nombre de degrés, minutes, secondes, etc., et il s'agira de former une table pour tous les arcs que l'on peut concevoir en s'arrêtant à des divisions assez petites. Généralement les tables ne contiennent que les arcs de minute en minute, quelques-unes contiennent les arcs de dix en dix secondes; mais quand nous aurons fait comprendre de quelle manière on peut construire les tables de sinus, tangentes, etc. en s'arrêtant à une certaine division, nous expliquerons comment, au moyen de ces tables, on peut trouver la valeur des mêmes lignes pour les arcs intermédiaires.

On désigne les degrés, minutes, secondes, etc. en affectant les nombres des accens °, ′, ″, etc., de sorte que 36° 43′ 51″ exprime un arc de 36 degrés 43 minutes 51 secondes; on peut aussi écrire le même arc de la manière suivante : 36°,4351, puisque les minutes, secondes, etc. sont des fractions décimales du degré. Ainsi, 0°,1 = 10′, 0°,01 = 1′, 0°,001 = 10″, 0,0001 = 1″.

25. Si les sinus ou les tangentes étaient proportionnels aux arcs, la construction des tables n'offrirait aucune difficulté, et même elles deviendraient inutiles, puisque connaissant le sinus du quadrans qui est égal au rayon, on aurait le sinus d'un arc quelconque, en multipliant le rayon par la fraction du quadrans qui exprimerait cet arc. Mais il est évident que les tangentes sont loin d'être proportionnelles aux arcs, puisque la tangente de 50° est égale au rayon, et que la tangente de 100° ou du quadrans est infinie. Quant au sinus, celui de 100° étant égal au rayon, le sinus de 50° devrait être égal à la moitié du rayon, tandis qu'il est égal au rayon divisé par $\sqrt{2}$ (n° 11). Quelque méthode que l'on emploie pour former les tables de sinus, on tombe nécessairement dans des calculs prodigieusement longs et pénibles; par des procédés très-ingénieux, on est parvenu, à l'aide des séries, à diminuer leur longueur autant qu'il était possible de le faire; mais comme nous ne pouvons donner ici à ce sujet tout le développement qui serait nécessaire pour exposer ces méthodes, nous nous contenterons d'en indiquer deux qu'il serait possible d'employer à la rigueur, et qui suffisent d'ailleurs pour faire sentir la possibilité de l'opération, principal but que nous nous proposons ici. Il est d'abord évident que tout peut se réduire à la recherche du sinus et du cosinus d'une division assez petite, d'une minute par exemple; car une fois que l'on connaîtra le sinus et le cosinus d'une minute, on pourra, par les formules données plus haut (§ précéd.), trouver le sinus et le cosinus de deux minutes, de trois minutes, etc., et s'élever ainsi jusqu'à un degré, et de là à tous les arcs de minute en minute.

26. Nous commencerons par démontrer que les arcs fort petits se confondent sensiblement avec leur sinus et leur tangente. En effet, soit a un certain arc, on a

$$\frac{\sin a}{\operatorname{tang} a} = \frac{\cos a}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{(r^2 - \sin^2 a)};$$

plus le sinus diminuera, plus $\sqrt{(r^2 - \sin^2 a)}$ approchera de

de devenir égal à r, et par conséquent plus le rapport $\frac{\sin a}{\text{tang } a}$ approchera de l'unité : ainsi, pour de très-petits arcs, le sinus est sensiblement égal à la tangente ; mais en considérant deux tangentes égales et qui partent d'un même point, elles embrasseront un arc double de celui dont l'une d'elles est la tangente trigonométrique, la corde qui joindra les points de contact sera le double du sinus, et il est évident que l'arc double est plus grand que la corde et plus petit que la double tangente ; donc l'arc lui-même est plus grand que la moitié de la corde, c'est-à-dire que le sinus, et plus petit que la tangente. Ainsi l'arc est toujours compris entre le sinus et la tangente ; et partant, si le sinus et la tangente ne diffèrent que d'une quantité extrêmement petite, l'arc sera encore plus près de se confondre avec chacune de ces lignes.

Il faut bien prendre garde ici que nous parlons de l'arc exprimé en parties du rayon, c'est-à-dire, de sa véritable longueur, et non de l'arc exprimé en degrés, minutes, etc. ; car cette dernière expression ne donne que le rapport de sa longueur à celle du quart de la circonférence. Cela posé, il est aisé dans tous les cas de juger si un arc donné a est assez petit pour se confondre sensiblement avec son sinus, et pour reconnaître jusqu'à quel chiffre décimal cette identité a lieu. On regardera a comme étant la longueur d'un certain sinus ; au moyen de la formule $\text{tang } A = \frac{r \sin A}{\sqrt{r^2 - \sin^2 A}}$, on calculera la valeur de la tangente correspondante ; tous les chiffres décimaux qui appartiendront au sinus et à la tangente, appartiendront nécessairement à l'arc lui-même ; ainsi l'on pourra juger à quel chiffre décimal la valeur du sinus cesse de se confondre avec celle de l'arc. Si l'ordre de ce chiffre est assez élevé, on pourra prendre la valeur du sinus pour celle de l'arc.

27. En prenant le rayon pour l'unité, on sait par la Géo-

métrie, que la demi-circonférence est

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793,$$

et partant on a

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079\ 63267\ 94896\ ;$$

l'arc d'une minute, ou la 10000ème partie du quart de la circonférence, sera donc

$$a = 0{,}00015\ 70796\ 32679\ 4896.$$

En exécutant le calcul indiqué (n° précéd.), on s'assurera que la fraction précédente peut être prise pour le sinus de a, du moins dans les douze premières décimales. Cette valeur approchée du sinus d'une minute, quoique suffisamment exacte pour l'arc lui-même, ne l'est pas assez pour servir de base à la construction des tables; car la multiplicité des opérations augmentant continuellement l'erreur, quand on serait arrivé à l'arc de 10′, l'erreur serait au moins décuplée, et l'exactitude ne porterait tout au plus que sur les onze premières figures, et ainsi de suite. Or il est impossible, en s'arrêtant à ce moyen d'approximation, de diminuer l'erreur qui affecte le sinus d'une minute dès la treizième figure; ainsi il est nécessaire ou de chercher une méthode qui donne une valeur beaucoup plus approchée, ou, si l'on veut se borner à un petit nombre de décimales, d'éviter la multiplicité des calculs qui contribuent à grossir l'erreur primitive.

28. Soit toujours $r = 1$, on a $\sin 100° = 1$, et $\sin 20° = \sin \frac{100°}{5}$ sera donné (n° 19) par l'équation du 5e degré

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0 :$$

or (n° 22) cette équation a pour racine 1, et si on la divise par $x - 1$, le quotient

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

est un quarré dont la racine égalée à zéro, donne l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0,$$

d'où

$$x = \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}30901\ 69943\ 74947$$

exact jusqu'à la dernière décimale qui est la 15e. La racine négative donnerait, si on la prenait positivement, le sinus de 60°.

Connaissant le sinus de 20°, on calculera cos 20°, on en déduira sin 10° par les formules du n° 17 ; on trouve

$$\sin 10^\circ = 0{,}15643\ \ 44650\ \ 40231\ ;$$

ensuite

$$\sin 5^\circ = 0{,}07845\ \ 90957\ \ 27845.$$

Le sinus de 1° sera (n° 19) la plus petite racine de l'équation

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0{,}0784590957,\ \text{etc.} = m :$$

il serait facile, par ce qui est dit, note V, page 125 de la Résolution des Equations numériques, deuxième édition, de le convaincre qu'on peut dans ce cas employer sans scrupule la méthode de Newton. On prendra pour première approximation la longueur de l'arc qui est, en s'arrêtant aux six premières décimales,

$$0{,}015707,$$

nombre que pour abréger nous représenterons par α; on fera, d'après la méthode $x = \alpha + x'$, et l'on aura

$$x' = -\frac{16\alpha^5 - 20\alpha^3 + 5\alpha - m}{80\alpha^4 - 60\alpha^2 + 5},$$

d'où l'on tirera, en substituant pour α et m leurs valeurs,

$$x' = 0{,}000000317311\,8207.$$

Comme le premier chiffre significatif est du 8e ordre décimal, on voit que les sept premières figures de la valeur de l'arc

appartiennent également au sinus ; on aura par conséquent

$$x = \sin 1^\circ = 0{,}0157073173118 21,$$

en faisant une opération de plus, c'est-à-dire, en snbstitnant cette nouvelle valeur approchée à la place du nombre α, et nommant x'' le résultat, on tronve que le premier chiffre significatif de la valeur de x'' est du 16e ordre décimal ; ainsi cette expression est exacte jusqu'au dernier chiffre.

A l'aide des valeurs trouvées, on pourra calculer le sinus des arcs de 10 en 10 degrés, de 5 en 5 degrés, et de degré en degré.

Ensuite dn sinus de 1° ou de 100′, on passera au sinus de 50′ ; de là au sinus de 25′. Quand on connaîtra ainsi le sinns de 25′, la résolution d'nne équation du 5e degré fera connaître le sinus de 5′, en prenant, comme nous l'avons déjà fait, l'arc pour valeur approchée du sinus ; et enfin, du sinns de 5′, on déduira le sinus de 1′, si l'on ne veut pas se contenter de l'approximation donnée par l'arc lui-même. Mais comme on est maître d'approcher de la valeur de sin 5′ d'aussi près qu'on le vondra, cette valeur peut suffire pour former les sinus des arcs de 5° en 5 minutes, et l'arc d'une minute donnera une exactitude snffisante ponr les arcs de minute en minnte compris entre ceux de 5, 10, 15, etc. quand on ne veut pas construire les tables avec plus de décimales. On ponrra même, dans ee cas, trouver les sinus de 2′, 3′, 4′, en multipliant sin 1′ par 2, 3, 4, etc. ; et pour avoir les sinus des arcs compris entre 5′ et 10′, 10′ et 15′, etc., on aura

$$\sin 6' = \sin(5' + 1'), \quad \sin 7' = \sin(5' + 2'), \text{ etc.}$$
$$\sin 11' = \sin(10' + 1'), \quad \sin 12' = \sin(10' + 2'), \text{ etc.}$$

La formule du sinus de la somme de deux arcs suppose que l'on connaisse le sinus et le cosinus de ces arcs ; mais il est facile de trouver le cosinus d'un arc dont on connaît le sinus. Il en résulte même qu'il ne sera pas nécessaire de calcnler tous les sinus, car dès que l'on aura trouvé le cosinus d'un

arc quelconque a, la relation $\cos a = \sin(100^\circ - a)$ fait voir que l'on aura le sinus de $100^\circ - a$; aussi les tables de sinus ne vont-elles que jusqu'à 50°, parce que donnant aussi les cosinus, elles renferment implicitement les sinus de tous les arcs plus grands que 50°.

29. On peut encore employer les formules (I) (n° 23) qui donnent

$$\sin(m+1)' + \sin(m-1)' = 2\sin m' \cos 1', \text{ etc.}$$

La formule $\text{tang}\, a = \frac{\sin a}{\cos a}$ (en faisant $r = 1$) donne la valeur la tangente ; ainsi la table des tangentes et cotangentes sera facile à construire, quand on aura celle des sinus et cosinus.

30. Les valeurs des lignes trigonométriques calculées ainsi en parties du rayon, sont ce qu'on appelle les *sinus naturels*, ou *les tangentes naturelles ;* mais les tables communément appelées *tables des sinus et tangentes*, ne contiennent que les logarithmes des sinus et des tangentes, afin que dans les calculs trigonométriques, qui se font toujours sur de grands nombres, on ait sur-le-champ les logarithmes de celles de ces lignes qui entrent dans les opérations. Comme les sinus sont nécessairement des fractions du rayon, pour éviter les logarithmes négatifs, on a pris dans les tables, $r = 10^{10}$, c'est-à-dire, égal à l'unité suivie de 10 zéros : or il est évident que les sinus, tangentes, etc. pris dans des cercles différens, sont entre eux comme les rayons de ces cercles ; donc si, dans le cercle dont le rayon est 1, l'arc a a pour sinus le nombre p ; il aura rp pour sinus dans le cercle dont le rayon est r. Ainsi, comme nous avons trouvé qu'en supposant $r = 1$, on avait

$$\sin 1' = 0{,}0001570796, \text{ etc.}$$

Dans le cas où $r = 10^{10}$, on aura

$$\sin 1' = 1570796, \text{ etc.}$$

dont la caractéristique doit être 6 ; ce qui explique la grandeur de la caractéristique des logarithmes de sinus, cosinus, etc.

Ces logarithmes sont ce qu'on appelle *sinus artificiels*, *tangentes artificielles*, etc., ou *logarithme-sinus*, *logarithme-tangentes*.

31. Les tables les plus répandues, en y comprenant celles de *Callet*, sont calculées d'après l'ancienne division du cercle, en 360 degrés, du degré en 60 minutes, etc. Cette observation est très-importante pour éviter les erreurs grossières que l'on commettrait, si l'on croyait qu'elles peuvent s'appliquer à la division décimale. La table sexagésimale de Callet, qui est la même que celle de *Gardiner*, donne les sinus, etc. des arcs de 10″ en 10″; il y en a joint une décimale, mais elle n'est calculée que de minute en minute.

Cependant il est possible que n'ayant que des tables calculées pour l'ancienne division, on ait besoin des lignes trigonométriques relatives à la division décimale, ou réciproquement; on pourrait les trouver en réduisant en parties de la division pour laquelle on a les tables, l'arc donné en parties de l'autre division. Mais pour éviter ce calcul à ceux qui se trouveraient dans le cas de le faire, on a construit une petite table qui sert à ces réductions, et que Callet a jointe aux siennes; comme ces opérations peuvent se présenter souvent, nous avons cru faire plaisir au lecteur, en la plaçant à la fin de la Trigonométrie (table III).

Cette table est composée de deux parties; la première sert à passer de la nouvelle division à l'ancienne, la seconde sert à passer de l'ancienne à la nouvelle.

La première renferme trois petites tables marquées *degrés*, *minutes*, *secondes*, et qui donnent respectivement ces parties de la nouvelle division en degrés, minutes, secondes de l'ancienne. La première ligne horizontale, immédiatement après le titre, présente cinq divisions, dans chacune desquelles se trouvent deux nombres séparés l'un de l'autre. Ces divisions correspondent à trois colonnes de nombres, dont les deux premières, qui se trouvent précisément sous les deux nombres de la première ligne, contiennent des nombres de degrés, de mi-

nutes ou de secondes et de 10es de seconde, suivant qu'il s'agit de la table des degrés, minutes, secondes, respectivement, et dont la troisième, séparée des deux premières par un filet, contient dans les mêmes circonstances, des minutes, secondes ou centièmes de secondes. Bornons-nous à la table des degrés. A la marge, on voit une colonne isolée qui contient les nombres naturels depuis zéro jusqu'à 9. Elle indique les unités de degrés; les deux nombres qui sont en tête dans chaque subdivision, indiquent des dixaines de degrés, et l'on voit facilement que les deux nombres de dixaines que renferme une division, diffèrent entre eux de 5. Cela posé, les nombres d'une des colonnes de degrés correspondent à-la-fois, comme dans la table dite de *Pythagore*, au nombre qui est en tête, et à celui qui est sur la même ligne dans la colonne marginale; les nombres de la colonne de minutes correspondent à-la-fois aux nombres des deux colonnes de degrés qui sont dans la même subdivision qu'elle. De sorte qu'étant donné un certain nombre de degrés de la nouvelle division, on cherchera en tête de la table le nombre des dixaines de degrés, et l'on suivra en descendant la colonne qui lui répond, jusqu'à ce que l'on parvienne à celui de ses nombres qui se trouve sur la même ligne horizontale que le nombre d'unités de degrés, on aura le nombre de degrés de la nouvelle division, et passant sur la même ligne au nombre de la troisième colonne dans la même subdivision, on aura le nombre de minutes qu'il faut ajouter. Il en sera de même des minutes et secondes, *mutatis mutandis*, en employant la 2e et la 3e table.

Il est bon d'observer que cette réduction se fait toujours exactement, car s'il s'agit d'évaluer un degré de la division décimale en parties de la division sexagésimale, on aura pour déterminer ces dernières, la relation

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{90}, \text{ doù } x = 0{,}9.$$

Ainsi le degré décimal est les 9 10mes du degré sexagésimal;

ce qui donne 54′ de l'ancienne division pour un degré de la nouvelle ; pour une minute, on aura la centième partie de 54′ = 3240″, c'est-à-dire, 32″,4, et par conséquent pour une seconde, 0″,324. On voit en même temps combien il est facile de former une pareille table.

Pour l'appliquer à un exemple, soit l'arc de 27° 36′ 9″ = 27°,3609 à réduire en parties de la division sexagésimale, on aura

pour	27°	24°	18′,	
pour	36′		19′	26″,4,
pour	9″			2″,916
		24°	37′	29″,316 ;

ainsi l'arc proposé est exprimé dans la division sexagésimale par 24° 37′ 29″,316.

La seconde partie contient aussi trois petites tables, dont la première donne les degrés, la seconde les minutes et la troisième les secondes. Dans les deux premières, comme dans les tables précédentes, les unités forment nne colonne marginale, et les dixaines sont en tête ; mais chaque dixaine forme une subdivision différente, qui ne renferme par conséquent qu'une seule colonne. Les degrés, minutes, secondes de la nouvelle division sont exprimées en décimales, et au commencement de chaque colonne, on a placé les zéros qui doivent précéder les nombres qui composent cette colonne. La troisième table donne directement tous les nombres de secondes réduites en parties de la division centésimale.

Mais dans ce cas-ci, la réduction ne se fait pas exactement comme dans l'autre, puisqu'on a

$$\frac{1}{90} = \frac{x}{100}, \text{ d'où } x = \frac{10}{9} = 1{,}111, \text{ etc.}$$

On voit que les degrés seront exprimés par des fractions indéfinies, mais périodiques, et dont la période n'aura qu'un chiffre ;

en prenant le 60me, on trouve pour une minute,

$$0{,}0185\ 185,\ \text{etc.};$$

donc les formules sont données par des fractions périodiques dont la période est de trois chiffres; en prenant encore le 60e, on trouve pour une seconde,

$$0{,}000308641975\ 30864\ \text{etc.};$$

donc les secondes sont données par des périodes de neuf chiffres.

On n'a mis dans les tables que le nombre de chiffres suffisant pour que l'on ait toute la période, en partant du dernier, et prenant 1, 3 ou 9 chiffres, suivant qu'il s'agira de degrés, minutes ou secondes. Mais généralement, il s'en faut que l'on ait besoin de répéter la période des secondes, et les 7 ou 8 premières figures donnent une exactitude suffisante.

Soit, par exemple, l'arc 24° 37′ 29″,316 de l'ancienne division, on aura

24°	26°,666667
37′	0 ,685185
29″	0 ,008950
0″,3	0 ,000092
0″,016	0 ,000005
	27°,360899

ou, comme plus haut, 27° 36′ 9″.

32. Il se présente maintenant, à l'égard des tables de sinus et de tangentes, deux problèmes analogues à ceux qui ont été résolus pour les logarithmes des nombres.

1°. *Étant donné un arc, trouver, d'après les tables, le logarithme de son sinus, de son cosinus, de sa tangente et de sa cotangente.*

Si l'arc proposé ne contient pas de divisions plus petites que celles des tables, les logarithmes de son sinus, de son cosinus,

de sa tangente et de sa cotangente se trouveront sur la même ligne que lui.

Si l'arc proposé contient des divisions plus petites que celles des tables, pourvu que celles-ci donnent au moins les divisions par minutes, on cherchera dans les tables le logarithme de chacune des lignes trigonométriques de l'arc immédiatement plus petit que l'arc donné, et de celui qui est immédiatement plus grand, on prendra la différence entre ces deux logarithmes; on divisera la fraction de minutes de l'arc donné par la différence constante entre deux arcs consécutifs des tables, on multipliera la première différence par ce quotient, et on ajoutera le produit au logarithme de l'arc approché, ou on le retranchera suivant qu'il sera question d'un sinus ou d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente.

2°. *Étant donné le logarithme d'un sinus, d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente, trouver l'arc correspondant.*

Si le nombre donné se trouve dans les tables, le nombre de degrés de l'arc sera sur la même ligne.

Mais si le logarithme ne se trouve pas exactemeut dans les tables, on y prendra le logarithme immédiatement plus grand et le logarithme immédiatement plus petit; on cherchera la différence de ces deux logarithmes. On cherchera de même la différence entre le logarithme donné et le logarithme immédiatement plus petit, ou plus grand, suivant qu'il sera question d'un sinus ou d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente; on divisera cette seconde différence par la première, et l'on prendra le quotient en dedans ou en dehors, suivant que l'on y trouvera plus d'avantage; et multipliant enfin par ce quotient fractionnaire la différence constante entre deux arcs consécutifs, on aura ce qu'il faut ajouter au plus petit des deux arcs, pour avoir l'arc cherché.

Ce procédé qui n'est jamais rigoureusement exact, mais qui approche d'autant plus de l'être que les arcs sont plus grands, ne peut être démontré qu'en employant des principes qui

sortent des élémens. On reconnaît en même temps qu'il n'est plus applicable aux sinus et tangentes des arcs compris entre 0 et 4°; et partant au cosinus et cotangentes des arcs plus grands que 96°. Mais comme ces arcs sont fort petits, les sinus leur sont sensiblement proportionnels; ainsi, si l'on nomme α un arc qui ne se trouve pas dans les tables, et a l'arc des tables immédiatement plus petit que lui, on aura à très-peu près,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\alpha}{a}, \text{ d'où } \log \sin \alpha - \log \sin a = \log \alpha - \log a;$$

équation d'où l'on tire

$$\log \sin \alpha = \log \sin a + \log \alpha - \log a,$$

et

$$\log \alpha = \log a + \log \sin \alpha - \log \sin a,$$

suivant que l'on cherche $\sin \alpha$ ou α lui-même.

Au reste, Callet a fait précéder ses tables de sinus qui contiennent, comme nous l'avons dit, tous les arcs de 10″ en 10″, d'une autre table pour les cinq premiers degrés de seconde en seconde; l'usage de cette table évite la difficulté dont nous venons de parler, à moins que les arcs ne soient extrêmement petits; mais alors la proportion que nous avons supposée approche tellement de l'exactitude, que l'erreur ne peut se faire sentir dans les applications ordinaires, ou même il est rare que l'on emploie des divisions plus petites que les secondes.

Nous renvoyons pour des détails plus étendus, aux tables que le lecteur aura entre les mains. Comme la disposition et par conséquent l'usage varie presque dans chacune d'elles, nous sommes forcés de nous borner à ces bases générales qui suffisent au reste, pourvu que l'on connaisse à fond la disposition de ses tables, et que l'on ait soin de s'exercer sur un assez grand nombre d'exemples.

§ IV.

Usage des lignes trigonométriques pour la résolution des triangles.

33. RÉSOUDRE un triangle, c'est généralement : *étant données un nombre de parties d'un triangle suffisant pour qu'il soit déterminé, trouver toutes les autres.* La Géométrie élémentaire donne les moyens d'y parvenir, puisqu'on y apprend à construire les triangles qui sont donnés par un nombre suffisant de leurs parties ; mais l'exactitude inévitable des instrumens, et des opérations qui s'exécutent avec leur secours, ne permet guères de compter sur le résultat de ces opérations. Aussi l'on préfère de chercher par le calcul les parties que l'on veut connaître ; l'erreur ne pouvant plus porter que sur les opérations géométriques qu'il est indispensable de faire pour exprimer en nombres les parties données, et cette erreur étant toujours très-petite, sur-tout si on la compare à celles que l'on peut commettre dans les opérations graphiques. D'ailleurs, il arrive presque toujours, par la grandeur des dimensions, que l'application immédiate des procédés géométriques est impraticable. On est forcé alors d'avoir recours à la construction de figures semblables, en réduisant les dimensions à l'aide d'une échelle, et il en résulte de nouvelles erreurs qui se combinent avec les autres, et contribuent encore à altérer l'exactitude des résultats.

34. On sait qu'un triangle est déterminé, lorsqu'on connaît trois des six choses qui le composent (angles et côtés), et que

parmi ces trois parties, il y a au moins un côté. On sait encore que la somme des trois angles est constante et égale à deux angles droits, et que par conséquent lorsque deux angles sont connus, le troisième est déterminé. Cela posé, on peut connaître :

1°. Deux angles et un côté, (alors les trois angles sont connus).

2°. Deux côtés et un angle. Ce cas se divise en deux autres, celui où l'angle donné est opposé à l'un des côtés, et celui où les deux côtés le comprennent.

3°. Les trois côtés.

Ainsi nous aurons à parcourir successivement ces différens cas. Nous commencerons par nous occuper des triangles rectangles qui offrent plus de facilité.

Résolution des triangles rectangles.

35. Soit le triangle ABC rectangle en B (fig. 7) ; on voit sans peine qu'un côté BC de l'angle droit serait le sinus de l'angle opposé A, et l'autre côté AB le cosinus du même angle, pour le cercle décrit du sommet A, avec un rayon égal à l'hypoténuse. Si l'on fait donc le rayon des tables égal à l'unité, que l'on nomme a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C respectivement, on aura

$$a = b \sin A, \quad c = b \cos A = b \sin c \ldots\ldots (1)$$

relations qui suffisent pour résoudre tous les cas qui peuvent se présenter.

Les équations précédentes apprennent que *dans un triangle rectangle, un côté quelconque est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté.*

On en déduit évidemment

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin A} = \text{tang } A,$$

ou

$$a = c \text{ tang } A \ldots\ldots (2)$$

donc *un côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre côté par la tangente de l'angle opposé au premier.*

En élevant chaque équation au quarré, et ajoutant, on retombe sur la relation connue

$$a^2 + c^2 = b^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Passons à l'application de ces principes aux différens cas, et remarquons d'abord que si parmi ces trois choses, un angle aigu, le côté opposé et l'hypoténuse, on en connaît deux, la troisième sera donnée par l'une des équations (1). De même de ces trois choses, les deux côtés de l'angle droit et l'angle opposé à l'un d'eux, deux étant données, la troisième se déterminera par l'équation (2). Enfin l'équation (3) donne un côté du triangle lorsqu'on connaît les deux autres.

36. Cela posé :

1°. Quand on connaît un angle aigu, on connaît les trois angles; ainsi il suffit d'avoir en outre un seul côté pour pouvoir déterminer entièrement le triangle.

Si ce côté est adjacent à l'angle droit, soit A l'angle donné, et c le côté connu; on aura

$$a = c \operatorname{tang} A, \quad b = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\cos A}.$$

Si ce côté est l'hypoténuse, on aura

$$a = b \sin A, \quad c = b \sin C.$$

2°. Si l'on connaît l'angle droit et deux côtés, ces côtés peuvent être ceux qui renferment l'angle droit, ou l'un d'eux seulement et l'hypoténuse.

Dans le premier cas, on anra

$$\operatorname{tang} A = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tang} C = \cot A;$$

et puisqu'on connaît maintenant tous les angles, on déterminera

l'hypoténuse par l'équation $b = \frac{a}{\sin A}$. On pourrait déterminer directement l'hypoténuse par la relation $b^2 = a^2 + c^2$, qui donne $b = \sqrt{(a^2 + c^2)}$; mais comme on opère généralement sur de grands nombres, et par conséqnent par logarithmes, il faudrait, pour calculer l'expression $\sqrt{(a^2 + c^2)}$, passer plusieurs fois des nombres aux logarithmes, et des logarithmes aux nombres, ce qu'on évite autant qu'il est possible.

Dans le second cas, on connaît l'hypoténuse et un côté a.

on a $\sin A = \frac{a}{b}$, $\sin C = \cos A$,

et $c = b \cos A$.

On pourra déterminer directement le côté c, au moyen de l'expression

$$c = \sqrt{(b^2 - a^2)} = \sqrt{(b + a)\,(b - a)},$$

qui donne, en appliquant les logarithmes,

$$\log c = \tfrac{1}{2} \log (b + a) + \tfrac{1}{2} \cos (b - a).$$

3°. Il est clair que l'on n'a pas besoin de s'occuper du cas où les trois côtés sont donnés, puisque le triangle serait plus que déterminé.

Résolution des triangles rectilignes quelconques.

37. Soit le triangle ABC (fig 8), et nommons tonjours a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C respectivement. Si l'on abaisse de l'angle B sur le côté AC la perpendiculaire BD, cette perpendiculaire, considérée comme côté du triangle rectangle BDC, aura pour expression $a \sin C$; considérée comme côté du triangle rectangle BDA, elle aura pour expression $c \sin A$; on a donc

$$a \sin C = c \sin A.$$

On déduirait de même

$$a \sin B = b \sin A, \quad b \sin C = c \sin B,$$

équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \ldots\ldots (1)$$

et donnent ce théorème :

Les sinus des angles d'un triangle quelconque sont entre eux comme les côtés opposés à ces angles.

On peut démontrer cette proposition par une construction simple et élégante. Si l'on circonscrit une circonférence au triangle ABC (fig. 9); que du centre o, l'on abaisse sur les côtés AB, BC, CA les perpendiculaires oD, oE, oF, et que l'on mène les rayons oA, oB, oC; les angles BoE, CoF, AoD sont respectivement égaux aux angles A, B, C, puisqu'ils ont même mesure. Cela posé, en nommant R le rayon, on a

$$\sin A = \sin BoE = \frac{BE}{R} = \frac{BC}{2R},$$

$$\sin B = \sin CoF = \frac{CF}{R} = \frac{AC}{2R},$$

$$\sin C = \sin AoD = \frac{AD}{R} = \frac{AB}{2R};$$

et partant

$$\sin A : \sin B : \sin C :: BC : AC : AB.$$

Comme on obtient ainsi trois équations entre six quantités, on est porté naturellement à croire qu'elles comprennent la solution de tous les cas qui peuvent se présenter; mais il est aisé de voir que de deux de ces équations on déduit la troisième, et que par conséquent elles se réduisent à deux.

Au reste, la relation qui existe entre les trois angles d'un triangle, en fournit une troisième

$$A + B + C = \pi;$$

d'où l'on peut tirer successivement

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \sin B \cos C + \sin C \cos B \\ \sin B &= \sin A \cos C + \sin C \cos A \\ \sin C &= \sin A \cos B + \sin B \cos A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

équations qui rentrent l'une dans l'autre, et dont l'une quelconque jointe aux équations (1), donne la solution de tous les cas des triangles rectilignes. Mais comme il est avantageux d'obtenir des valeurs auxquelles on puisse appliquer facilement les logarithmes, et qu'en employant les équations (1) et (2), on ne parvient pas toujours aux résultats les plus simples, nous allons en déduire d'autres qui nous offriront dans certains cas plus d'avantage.

38. Des équations (1) on tire

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}, \quad \sin B = \frac{b \sin C}{c}.$$

Ces valeurs substituées dans les équations (2) donnent, après avoir divisé par $\sin C$,

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

On peut parvenir directement à ces équations, par la considération qui nous a conduits aux équations (1). Car le côté AC (fig. 8) est divisé par la perpendiculaire BD, en deux segmens AD et BD, dont le premier a pour expression $c \cos A$, et le second $a \cos C$; ainsi

$$b = a \cos C + c \cos A.$$

on trouverait de même les deux autres.

39. Si l'on élimine successivement deux des cosinus entre ces trois équations, on trouve les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 2ab \cos C &= a^2 + b^2 - c^2 \\ 2ac \cos B &= a^2 + c^2 - b^2 \\ 2bc \cos A &= b^2 + c^2 - a^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

On peut encore obtenir directement ces formules ; car on a vu (Géom.) que l'on avait (fig. 8)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b.CD, \text{ ou } c^2 = a^2 + b^2 + 2b.CD,$$

suivant que l'angle C est aigu ou obtus : or dans le premier cas, on a $CD = a\cos C$, dans le second $CD = a\cos BCD = -a\cos C$. Ainsi, quel que soit l'angle C, il en résulte l'équation

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

40. D'ailleurs on a généralement (n° 17),

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 ;$$

en employant successivement ces deux transformations, on obtient facilement les six équations

$$\left.\begin{aligned} c^2 - (a-b)^2 &= 4ab\sin^2\frac{C}{2} \\ b^2 - (a-c)^2 &= 4ac\sin^2\frac{B}{2} \\ a^2 - (b-c)^2 &= 4bc\sin^2\frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} (a+b)^2 - c^2 &= 4ab\cos^2\frac{C}{2} \\ (a+c)^2 - b^2 &= 4ac\cos^2\frac{B}{2} \\ (b+c)^2 - a^2 &= 4bc\cos^2\frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

41. Comme on a aussi en général $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, et partant, $\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}$, on tire des équations (5) et (6)

$$\left.\begin{aligned} \{c^2-(a-b)^2\}\{(a+b)^2-c^2\} &= 4a^2b^2\sin^2C \\ \{b^2-(a-c)^2\}\{(a+c)^2-b^2\} &= 4a^2c^2\sin^2B \\ \{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\} &= 4b^2c^2\sin^2A \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

Passons maintenant à la solution de chaque cas particulier.

42. 1°. *Étant donnés deux angles et un côté, trouver le troisième angle et les deux autres côtés.*

Deux des angles étant donnés, le troisième sera déterminé par l'équation

$$A + B + C = \pi :$$

ainsi les trois angles sont connus ; et comme les équations (1) font connaître un quelconque des côtés, lorsque l'on connaît l'angle opposé, ainsi qu'un autre côté et l'angle qui lui est opposé ; elles suffiront pour déterminer les deux côtés cherchés. Si, par exemple, c est le côté donné, on aura

$$a = \frac{\sin A}{\sin C} c, \qquad b = \frac{\sin B}{\sin C} c ;$$

ou, par logarithmes,

$$\log a = \log \sin A - \log \sin C + \log c ;$$
$$\log b = \log \sin B - \log \sin C + \log c.$$

Les équations (3) donneraient immédiatement aussi la solution de ce cas, mais d'une manière bien moins simple.

43. 2°. *Étant donnés deux côtés et un angle, trouver le troisième côté et les deux autres angles.*

L'angle peut être opposé à l'un des côtés, ou compris entre les deux.

I. Dans le premier cas, l'une des équations (1) donnera toujours le sinus d'un des deux angles cherchés. Si, par exemple, les côtés donnés sont a et b, et que l'angle soit A, on aura

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A ,$$

d'où $$\log \sin B = \log b - \log a + \log \sin A.$$

Mais on doit remarquer la différence qui existe entre cette

solution et la précédente. Dans celle-là, l'angle même était déterminé d'après l'équation $A+B+C=\pi$; dans celle-ci, l'angle B n'est déterminé que par son sinus, et par conséquent il peut être aigu ou obtus. Au reste, cet angle une fois fixé, le troisième est connu, et l'équation

$$c=\frac{\sin C}{\sin A}a$$

fera connaître le côté c.

II. Dans le second cas, les équations (4) feront connaître le troisième côté, puisqu'elles donnent

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

ou $$c=\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos C)}, \text{ etc.}$$

mais ces formules ne se prêtent pas à l'application des logarithmes, tandis que les équations (5) et (6) donnent

$$c=\sqrt{\{(a-b)^2+4ab\sin^2\tfrac{1}{2}C\}}, \text{ etc.}$$
$$c=\sqrt{\{(a+b)^2-4ab\cos^2\tfrac{1}{2}C\}}, \text{ etc.}$$

La première peut se mettre sous la forme

$$c=(a-b)\sqrt{\left\{1+\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\tfrac{1}{2}C\right)^2\right\}}:$$

nommons α l'angle dont la tangente est $\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\frac{1}{2}C$, on aura

$$c=(a-b)\sqrt{(1+\tan g^2\alpha)}=(a-b)\sec\alpha=\frac{a-b}{\cos\alpha}.$$

Or l'équation

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\tfrac{1}{2}C=\tan g\,\alpha,$$

donne par logarithmes, la suivante

$$\log\tan g\,\alpha=\log 2+\tfrac{1}{2}(\log a+\log b)+\log\sin\tfrac{1}{2}C-\log(a-b),$$

à l'aide de laquelle on déterminera l'angle α; on aura ensuite

$$\log. c=\log(a-b)-\log\cos\alpha.$$

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$c=(a+b)\sqrt{\left\{1-\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\tfrac{1}{2}C\right)^2\right\}};$$

et si l'on fait

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cos\tfrac{1}{2}C=\cos\beta,$$

il en résulte

$$c=(a+b)\sqrt{(1-\cos^2\beta)}=(a+b)\sin\beta.$$

Ainsi l'on peut employer l'une ou l'autre de ces transformations; elles conduisent également à des formules aisément calculables par logarithmes.

Quand le côté c est connu, les angles se déterminent facilement à l'aide des équations (1). On aurait, par exemple,

$$\sin A=\frac{a}{c}\sin C, \quad \sin B=\frac{b}{c}\sin C;$$

ou plutôt, quand l'angle A est trouvé,

$$B=\pi-A-C.$$

Nous donnerons plus bas (n° 45) une solution différente du même problème.

44. 3°. *Étant donnés trois côtés, trouver les angles.*

Les équations (4), (5), (6) et (7) donnent également la solution de ce cas; car on en tire, par exemple,

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C=\frac{c^2-(a-b)^2}{4ab}=\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4ab};$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}C=\frac{(a+b)^2-c^2}{4ab}=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab};$$

$$\sin^2 C=\ldots\ldots=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{4a^2b^2};$$

Il est aisé de voir que les trois dernières équations sont celles qui se prêtent le mieux à l'application des logarithmes; d'ailleurs leur forme est élégante et facile à retenir. Si l'on fait, pour abréger, $a+b+c=2s$, elles deviennent.

$$\sin^2\tfrac{1}{2}C=\frac{(s-b)(s-a)}{ab},\quad \cos^2\tfrac{1}{2}C=\frac{s(s-c)}{ab};$$

$$\sin^2 C=4.\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2}.$$

d'où l'on peut tirer à volonté $\sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$, ou $\sin C$. Si l'on divise les deux premières, membre à membre, on a encore

$$\tang^2\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)},$$

formule qui peut également servir.

En employant les logarithmes, on a

$$2\log\sin\frac{C}{2}=\log(s-a)+\log(s-b)-\log a-\log b,$$

$$2\log\cos\frac{C}{2}=\log s+\log(s-c)-\log a-\log b,$$

$$2\log\tang\frac{C}{2}=\log(s-a)+\log(s-b)-\log s-\log(s-c),$$

$$2\log\sin C=\log s+\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)+\log 4-2\log a-2\log b.$$

45. Nous avons annoncé une autre solution dn cas où l'on connaît deux côtés et l'angle qu'ils comprennent; quoiqu'elle ne se lie pas à la marche que nous avons adoptée, elle est trop ingénieuse pour que nous la passions sous silence.

Puisque l'on connaît un des angles du triangle, on connaît la somme des deux autres, et par conséquent la tangente de la moitié de cette somme; si l'on parvient à trouver la tangente de la demi-différence, on connaîtra la demi-somme et

la demi-différence des angles cherchés, d'où il sera facile de déduire chacun d'eux. Or nous allons démontrer que *dans tout triangle la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés est à la tangente de la demi-différence.*

Il est d'abord facile de conclure de l'équation

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

que l'on a

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B};$$

or nous avons prouvé (n° 23, 4°), que

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right)} \text{ (*)}.$$

(*) On peut encore démontrer cette proposition par une construction fort simple. Soit $AM'm'A$ (fig. 10) le cercle dont le rayon est 1, et AM, AM' deux arcs dont les sinus sont MP, $M'P'$; si l'on mène Mn parallèle au diamètre AA', qu'après avoir prolongé $M'P'$ jusqu'à la rencontre de la partie inférieure de la circonférence, on joigne nM' et nm'; les angles $M'nM$, Mnm' étant inscrits, auront pour mesure la moitié des arcs MM', Mm' respectivement, c'est-à-dire la moitié de la différence et la moitié de la somme des arcs AM', AM, que nous représenterons par p et q. Mais à cause des triangles rectangles $M'mn$, $m'mn$, on a $\frac{M'n}{mn} = \text{tang } M'nM'$, $\frac{m'm}{mn} = \text{tang } Mnm'$; donc

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{p-q}{2}\right)} = \frac{mm'}{mM'} = \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q},$$

car on a évidemment

$$mm' = \sin p + \sin q, \quad M'm = \sin p - \sin q.$$

donc aussi

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tang}\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right)},$$

relation qui fera connaître $\text{tang}\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

Une fois les angles A et B connus, on aura sur-le-champ

$$c=\frac{\sin C}{\sin A}.a.$$

§ V.

Application de la Trigonométrie à différens problèmes.

46. PROBLÈME I. MESURER *la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible.*

Soit l'édifice AP (fig. 11), on prendra à volonté la distance BP; et plaçant en B un instrument propre à mesurer les angles, dont nous supposerons que qB soit la hauteur, on mesurera l'angle Aqp. Alors on connaîtra dans le triangle rectangle Apq, l'angle q et le côté $pq = BP$; on pourra donc calculer Ap.

Supposons, par exemple, que $BP = 132^m$, et que l'angle Aqp ait été trouvé de 54° 33′ 33″ (nouvelle division), on aura

$$Ap = 132^m . \text{tang}\,(54° 33' 33''),$$

ou

$$\log Ap = \log 132 + \log \text{tang}\,(54° 33' 33'');$$

or on a

$$\log 132 \ldots\ldots = 2{,}1205739$$
$$\log \text{tang}\,(54° 33' 33'') \ldots = 10{,}0593050$$

dont la somme est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11{,}1798789$;

et comme le rayon des tables est 10^{10}, il faut retrancher son logarithme 10, et il en résulte

$$\log Ap = 2{,}1798798,$$

et

$$Ap = 151^m{,}314;$$

pour avoir la hauteur cherchée, il ne reste plus qu'à ajouter celle de l'instrument.

47. PROBLÈME II. *Mesurer la hauteur d'un édifice dont le pied est inaccessible.*

Soit l'édifice AP (fig. 12), on prendra à volonté les points B, B' dont on mesurera la distance BB'. Du point B on mesurera l'angle Aqq'; du point B', on mesurera l'angle $Aq'q$; alors dans le triangle qAq', on connaîtra un côté et les deux angles adjacens; on pourra par conséquent calculer le côté Aq; on mesurera ensuite l'angle Aqp, et comme, dans le triangle rectangle Apq, on connaîtra l'angle q et l'hypoténuse Aq, on pourra calculer Ap.

Supposons qu'on ait pris $BB' = 25^m$, et que l'angle Aqq' soit de 68° 38′ 89″, l'angle $Aq'q$ de 44° 94′ 44″, et l'angle Aqp de 63° 40′ 74″. L'angle qAq' étant le supplément de la somme des angles $Aq'q$, Aqq', sera de 86° 66′ 67″. Or on a

$$Aq = \frac{\sin Aq'q}{\sin qAq'} qq',$$

d'où

$$\log Aq = \log \sin Aq'q - \log \sin qAq' + \log qq'.$$

Mais on a

$$\log \sin Aq'q = 9{,}8120999$$
$$\text{compl. } \log \sin qAq' = 0{,}0095956$$
$$\log qq' = 1{,}3979400$$
$$\log Aq = 1{,}2196355;$$

donc

et partant, $Aq = 16^m{,}58195$.

Le triangle rectangle Apq donne $Ap = Aq \sin Aqp$, ou

$$\log Ap = \log Aq + \log \sin Aqp,$$

et comme on a

$$\log Aq = 1{,}2196355$$
$$\log \sin Aqp = 9{,}9239191;$$
$$\log Ap = 1{,}1435546,$$

donc

d'où $Ap = 13^m,91729$, à quoi il faut ajouter la hauteur de l'intrument.

S'il s'agissait en même temps de déterminer la position du pied de l'édifice par rapport à la ligne BB', on mesurerait l'angle $Aq'p$, et l'on calculerait le côté pq' à l'aide du triangle rectangle Apq' : on pourrait se dispenser de mesurer l'angle $Aq'p$ en calculant le côté Aq', comme on a calculé Aq. D'ailleurs, dans le triangle rectangle Apq, on peut calculer pq; on connaitra ainsi les trois côtés du triangle qpq', ou, ce qui est la même chose, du triangle BPB'; la position du point P sera par conséquent déterminé.

Ainsi comme on a

$$Aq' = \frac{\sin Aqq'}{\sin qAq'}\, qq',$$

$$\log Aq' = \log \sin Aqq' - \log \sin qAq' + \log qq';$$

d'ailleurs

$$\log \sin Aqq' = 9,9441041$$
$$\text{compl log sin } qAq' = 0,0095956$$
$$\log qq' = 1,3979400$$

donc $\log Aq' = 1,3516397$;

et partant, $Aq' = 22^m,47190$.

On a ensuite

$$\log pq = \tfrac{1}{2}\{\log(Aq + Ap) + \log(Aq - Ap)\}$$
$$\log pq' = \tfrac{1}{2}\{\log(Aq' + Ap) + \log(Aq' - Ap)\}$$
$$\log(Aq + Ap) = 1,4842891$$
$$\log(Aq - Ap) = 0,4256418$$

donc $2\log pq = 1,9099309$;

partant..... $\log pq = 0,9549654$,

et $pq = 9^m,01499$; on trouvera de même $pq' = 17^m,64363$.

On peut même encore déterminer la perpendiculaire abaissée du point P sur la droite BB', et les segmens BD, $B'D$. En effet, on a $PD = BP \sin PBB' \ldots BD = BP \cos PBB'$. Or (n° 44) étant donnés les trois côtés d'un triangle, on peut trouver chacun des angles. En cherchant le sinus de PBB', on aura

$$\begin{aligned} s &= 25^m,82931 \\ s - BB' &= 0^m,82931 \\ s - BP &= 16\ ,81432 \\ s - B'P &= 8\ ,18568 \\ \log s &= 1\ ,4121128 \\ \text{compl} \log (s - BB') &= 9\ ,9187169 \\ \log (s - BP) &= 1\ ,2256792 \\ \log (s - B'P) &= 0\ ,9130547 \end{aligned}$$

donc... $\log s(s-BB')(s-BP)(s-B'P) = 3^m,4695636$,
dont la moitié..... $1\ ,7347818$

est le logarithme de $\sqrt{s(s-BB')(s-BP)(s-B'P)}$, quantité que nous représenterons par Δ; et comme on a

$$\sin PBB' = \frac{2\Delta}{BB' \times BP},$$

$$\log \sin PBB' = \log 2 + \log \Delta - \log BB' - \log BP.$$

Or

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,3010300 \\ \log \Delta &= 1,7347818 \\ \text{compl} \log BB' &= 8,6020600 \\ \text{compl} \log BP &= 9,0450346\ ; \end{aligned}$$

donc $\log \sin PBB' = 9,6829065$,

et l'on trouve dans les tables que cet angle est de 32° 0′ 65″ $\frac{1}{2}$, et par suite

$$\log \cos PBB' = 9,9426318.$$

Connaissant le sinus et le cosinus de l'angle PBB', on aura

$$\log \sin PBB' = 9{,}6829065$$
$$\log BP = 0{,}9549654$$

d'où $$\log PD = 0{,}6378719,$$

et $PD = 4^m{,}34382$.

$$\log \cos PBB' = 9{,}9426318$$
$$\log BP = 0{,}9549654$$

d'où $$\log BD = 0{,}8975972,$$

et $BD = 7^m{,}89946$.

La dernière partie de ce problème peut encore se résoudre d'une autre manière; car x étant le segment du côté b adjacent au côté a, dans le triangle dont les trois côtés sont a, b, c, on a (n° 39)

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2bx,$$

ou

$$c^2 - a^2 = b^2 \mp 2bx,$$

équation qui donne, suivant que l'on prend le signe + ou le signe —,

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b-x-x}{c-a}, \text{ ou } \frac{c+a}{b+x+x} = \frac{b}{c-a};$$

or $b \pm r$ est l'autre segment; donc il en résulte ce théorème :

Si dans un triangle quelconque, on abaisse une perpendiculaire sur un des côtés, on aura la proportion suivante : *la somme des deux autres côtés est à la somme des segmens formés par la perpendiculaire, comme la difference de ces mêmes segmens est à la difference des côtes* (*).

(*) La construction suivante démontre géométriquement cette proposition : Si du sommet B du triangle ABC (fig. 13) avec le plus petit des côtés AB, BC, comme rayon, on décrit la circonférence Cmn, qui coupe en n et p les

Ainsi, dans l'exemple actuel, nous aurons

$$b = BB' = 25^m,\quad a = BP = 9^m,0151,\quad c = B'P = 17^m,64363,$$

d'où

$$a + c = 26^m,65872,\quad c - a = 8,62854.$$

Cela posé,

$$\log (a + c) = 1,4258393$$
$$\log (c - a) = 0,9359373$$
$$\text{compl log } b = 8,6020600$$

d'où log de la som. ou de la différ. $= 0,9638366$.

Le nombre qui correspond à ce logarithme étant 9,20103 plus petit que 25, est la différence des segmens, et l'on tirera pour le plus petit

$$BD = 7^m,89948.$$

La légère différence qui existe entre ces deux valeurs, provient du nombre d'opérations qu'il a fallu exécuter par la première méthode; mais elle prouve en même temps que l'erreur est inappréciable dans la pratique.

Connaissant BD, on aura

$$PD = \sqrt{(BP + BD)\,(BP - BD)}.$$

48. PROBLÈME III. *Trouver la distance de deux points inaccessibles.*

Soient les points P et Q (fig. 14); après avoir pris arbitrairement une base AB qu'on mesurera, on observera du point A les angles PAQ, QAB, PAB. Si les droites PQ, AB

---

côtés AB, AC, et rencontre en m le prolongement du même côté AB, on aura (*Géom.*)

$$Am : AC :: Ap : An.$$

Or Am est la somme des côtés AB, BC, An en est la différence, Ap est la différence ou la somme des segmens, suivant que la perpendiculaire BD tombe en dedans ou en dehors du triangle, et le côté AC est la somme ou la différence des segmens dans les mêmes circonstances.

sont dans un même plan, l'un de ces trois angles sera égal à la somme des deux autres, sinon ils formeront un angle trièdre. Dans tous les cas, après avoir observé du point B les angles ABP, ABQ, on connaîtra, dans le triangle APB, le côté AB et les deux angles adjacens PAB, PBA; on pourra par conséquent déterminer le côté AP. On connaîtra de même dans le triangle AQB le côté AB et les angles adjacens, on pourra par conséquent déterminer le côté AQ. Ainsi on connaîtra dans le triangle PAQ, l'angle PAQ et les côtés qui le comprennent; on pourra donc déterminer le troisième côté PQ, qui est la distance cherchée.

(Il est aisé de voir que le problème précédent n'est qu'un cas particulier de celui-ci).

Supposons, par exemple, qu'on ait trouvé

$$AB = 320^m, \quad PAB = 67°\,45', \quad PAQ = 34°\,57'\,10'',$$
$$QAB = 34°\,47'\,10'', \quad ABP = 51°\,63', \quad ABQ = 39°\,30';$$

on aura

$$APB = 80°\,92', \quad AQB = 126°\,22'\,90''.$$

Cela posé,

$$AP = \frac{\sin 51°\,63'}{\sin 80°\,92'}\,320^m,$$

ou

$$\log AP = \log \sin 51°\,63' - \log \sin 80°\,92' + \log 320.$$

Or

$$\log \sin 51°\,63' = 9{,}8603247$$
$$\text{compl} \log \sin 80°\,92' = 0{,}0198044$$
$$\log 320 = 2{,}5051500$$
$$\log AP = 2{,}3852791;$$

donc $AP = 242^m{,}817$.

De même,

$$AQ = \frac{\sin 39°\,30'}{\sin 126°\,22'\,90''}\,320^m = \frac{\sin 39°\,30'}{\cos 36°\,22'\,90''}\,320^m.$$

Or

$$\log \sin 39^\circ 30' = 9{,}7625693$$
$$\text{compl} \log \cos 26^\circ 22' 90'' = 0{,}0379528$$
$$\log 320 = 2{,}5051500$$
$$\log AQ = 2{,}3056721 ;$$

donc $AQ = 202{,}1492$.

On a ensuite (n° 43. II)

$$PQ = (AP - AQ)\frac{1}{\cos \alpha},$$

l'angle α étant déterminé par l'équation

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2} PAQ}{AP - AQ} \sqrt{AP.AQ},$$

ou

$$\log \text{tang}\, \alpha = \log 2 + \tfrac{1}{2} \log AP + \tfrac{1}{2} \log AQ + \log \sin \tfrac{1}{2} PAQ - \log (AP - AQ).$$

Or

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\tfrac{1}{2} \log AP = 1{,}1926395$$
$$\tfrac{1}{2} \log AQ = 1{,}1528361$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2} PAQ = 9{,}4284524$$
$$\text{compl} \log (AP - AQ) = 8{,}3907492$$

d'où..... $\log \text{tang}\, \alpha = 10{,}4657072$

et $\alpha = 79^\circ\, 0'\, 95''$.

D'ailleurs

$$\log PQ = \log (AP - AQ) - \log . \cos \alpha :$$

or

$$\log (AP - AQ) = 1{,}6092508$$
$$\text{compl} \log \cos \alpha = 0{,}4897550$$

d'où $\log PQ = 2{,}0990058$;

et enfin $PQ = 125^m{,}605$.

49. PROBLÈME IV. *Étant donné dans un triangle, un angle, le côté opposé et la différence des deux autres, trouver ces deux derniers et les angles opposés.*

Supposons que l'on connaisse l'angle A (fig. 15), le côté BC et la différence des côtés AC, AB. Si l'on prend $AD = AB$, le triangle ABD sera isoscèle; et comme l'angle A est connu, on pourra déterminer la somme des angles ABD, ADB, et par conséquent chacun d'eux. On connaîtra donc l'angle CDB qui est supplément de ADB, et l'on aura dans le triangle CDB, les deux côtés BC, DC, et l'angle opposé au côté BC; ainsi l'on pourra calculer les angles DBC, BCD, et par suite les côtés AB, AC. D'ailleurs, comme l'angle ADB est nécessairement aigu, l'angle BDC sera obtus, et par conséquent DBC sera aigu; ainsi l'ambiguité remarquée (n° 42) n'a pas lieu ici.

Soit l'angle $A = 48° 50'$, le côté $BC = 12^m$, et $AC - AB = 4^m$; on aura

$$ADB + ABD = 150° 51', \text{ et partant } ADB = 75° 75'.$$

Cela posé,

$$\sin DBC = \tfrac{4}{12} \sin BDC = \tfrac{1}{3} \sin 75° 75' :$$

or

$$\log \sin 75° 75' = 9{,}9676994$$
$$\log 3 = 0{,}4771213$$

donc $$\log \sin DBC = 9{,}4905781,$$

et $DBC = 20° 2' 83''$; de là $B = 95° 77' 83''$, et $C = 55° 72' 17''$.

D'ailleurs

$$AB = \frac{\sin C}{\sin A} BC :$$

or

$$\log \sin C = 9{,}8852020$$
$$\text{compl} \log \sin A = 0{,}1609928$$
$$\log 12 = 1{,}0791813$$

donc $$\log AB = 1{,}1253761,$$

et $AB = 13^m{,}346767$, et $AC = 17^m{,}346767$.

50. PROBLÈME V. *Trois points étant donnés sur une carte, on demande d'en déterminer un quatrième par la connaissance des trois angles formés par les droites qui joignent le point cherché et les points donnés.*

Soient A, B, C les trois points donnés (fig. 16), et M le point cherché; nommons a, b les distances AB, BC, et α, β les angles connus AMB, BMC, x, y les angles inconnus BAM, BCM. On aura dans le triangle AMB,

$$MB = \frac{a \sin x}{\sin \alpha},$$

dans le triangle BMC,

$$MB = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

d'où

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta};$$

et partant,

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

On tire de là

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta},$$

ou (n° 45)

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x-y}{2}} = \frac{b + a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}{b - a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}.$$

Or l'angle M et l'angle B étant connus, on aura $x + y = 2\pi - B - M$; ainsi $\operatorname{tang} \frac{x+y}{2}$ est connu, on tirera donc de cette équation la valeur de $\operatorname{tang} \frac{x-y}{2}$,

$$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \frac{b - a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}}{b + a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}} \operatorname{tang} \left(\pi - \frac{B+M}{2} \right).$$

Connaissant alors la demi-somme et la demi-différence des angles x, y, on aura aisément chacun d'eux.

Il est à remarquer que le problème devient indéterminé quand $B+M=\pi$, car alors $\sin x=\sin y$, et les inconnues disparaissent de l'équation.

Supposons, pour donner un exemple de ce problème,

$a=200^m$, $b=170^m$, $\alpha=51°\,43'$, $\beta=33°\,50'$, $B=127°\,41'$;

on aura

$$\alpha+\beta=M=84°\,93',\quad \frac{B+M}{2}=106°\,17',$$

et partant

$$\pi-\frac{B+M}{2}=93°\,83'.$$

Cela posé, on a

$$\log\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=\log a+\log\sin\beta-\log\sin\alpha:$$

or

$$\begin{aligned}\log 200 &= 2{,}3010300\\ \log\sin 33°\,50' &= 9{,}7009334\\ \text{compl}\log\sin 51°\,43' &= 0{,}1409756;\end{aligned}$$

donc $$\log\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=2{,}1429390,$$

et $$\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}=138{,}9757.$$

Ainsi

$$\text{tang}\frac{x-y}{2}=\frac{31{,}0243}{308{,}9757}\text{tang}\,93°\,83':$$

or

$$\begin{aligned}\log 31{,}0243 &= 1{,}4917020\\ \log\text{tang}\,93°\,83' &= 11{,}0122322\\ \text{compl}\log 308{,}9757 &= 7{,}5100756;\end{aligned}$$

donc $$\log\text{tang}\frac{x-y}{2}=10{,}0140098,$$

et $\frac{x-y}{2}=51°\,2'\,66''$; d'où

$$x=144°\,85'\,66'',\quad y=42°\,80'\,34''.$$

51. PROBLÈME VI. *Trouver l'expression de la surface d'un triangle en fonction des données des différens cas qui peuvent se présenter dans la résolution.*

1°. *Lorsqu'on connaît les angles et un côté.* Soit a le côté connu, la surface du triangle ABC est exprimée en général par $\frac{ah}{2}$, h étant la perpendiculaire abaissée du point A sur le côté a; on a d'ailleurs

$$h = b \sin C, \quad b = \frac{\sin B}{\sin A} a;$$

ainsi

$$h = \frac{\sin B \sin C}{\sin A} a.$$

et partant,

$$\text{surf } ABC = \frac{\sin B \sin C}{2 \sin A} a^2.$$

2°. *Lorsqu'on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.* Soient a, b, A les côtés et l'angle connus, on a

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A,$$

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

$$= \frac{\sin A}{a} (b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)}) :$$

or surf. $ABC = \frac{ah}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$; donc

$$\text{surf } ABC = \frac{b \sin A}{2} \{b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)}\}.$$

3°. *Lorsqu'on connaît deux côtés et l'angle compris.* Soient a, b, C les côtés et l'angle donnés; on aura évidemment

$$\text{surf } ABC = \frac{a}{2} . h = \frac{ab \sin C}{2}.$$

4°. *Lorsqu'on connaît les trois côtés.* Comme on a (n° 44)

$$\sin C = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ab};$$

donc

$$\text{surf } ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

résultat remarquable par son élégance et sa simplicité.

PROBLÈME VII. *Étant donnée la surface d'un polygone inscrit et celle du polygone circonscrit semblable, trouver celles du polygone inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double.*

Soit AB (fig. 17) l'un des côtés du polygone inscrit donné, et m leur nombre; ab le côté homologue du polygone circonscrit semblable; AC, BC deux côtés du polygone inscrit d'un nombre double de côtés, mn un côté du polygone circonscrit semblable, Am et Bn deux de ses demi-côtés. Nommons p, P les surfaces des polygones inscrit et circonscrit donnés, et p', P' les surfaces des deux autres polygones analogues; on aura

$$p = m.AOB, \quad P = m.aOb,$$
$$p' = 2m.AOC, \quad P' = 2m.mOn.$$

Or si l'on nomme α l'angle AOC, on trouvera facilement

$$\text{tri } AOB = \tfrac{1}{2}\overline{OA}^2.\sin 2\alpha = \overline{OA}^2 \sin\alpha\cos\alpha$$
$$\text{tri } aOb = \tfrac{1}{2}\overline{aO}^2.\sin 2\alpha = \overline{OA}^2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\text{tri } AOC = \tfrac{1}{2}\overline{AO}^2 \sin\alpha$$
$$\text{tri } mOn = \tfrac{1}{2}\overline{mO}^2 \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\overline{OA}^2\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha},$$

en observant qu'on a

$$aO = \frac{AO}{\cos\alpha}, \quad mO = \frac{AO}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

donc

$$p = m.\overline{OA}^2 \sin\alpha\cos\alpha, \quad P = m.\overline{OA}^2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$
$$p' = m.\overline{OA}^2\sin\alpha, \qquad P' = m.\overline{OA}^2\frac{\sin\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

On tire de là

$$\frac{p}{p'} = \cos\alpha, \quad \frac{p'}{P} = \cos\alpha, \quad \frac{p'}{P} = \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

et partant

$$\frac{p}{p'} = \frac{p'}{P}, \text{ qui donne } p'^2 = Pp,$$

$$\frac{p'}{P} = \frac{1+\frac{p}{p'}}{2}, \text{ d'où } P' = \frac{2p'^2}{p+p'} = \frac{2Pp}{p+p'}.$$

Ces formules extrêmement simples, donnent le moyen d'approcher d'aussi près qu'on le voudra de la surface du cercle; et partant, si l'on fait le rayon = 1, du rapport de la circonférence au diamètre (Voyez Géom. de Legendre. Liv. IV, Prop. 14). Au reste il serait aussi aisé de trouver des formules analogues pour les côtés eux-mêmes.

FIN DE LA TRIGONOMÉTRIE.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a \qquad \text{tang}\left(\right.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a \qquad \cot\left(\right.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a \qquad \text{tang}\left(\right.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a \qquad \cot\left(\right.$$

$$\sin(\pi-a)=\sin a \qquad \text{tan}$$
$$\cos(\pi-a)=-\cos a$$

$$\sin(\pi+a)=-\sin a \qquad \text{ta}$$
$$\cos(\pi+a)=-\cos a \qquad \text{c}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a \qquad \text{tang}\left(\right.$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a \qquad \cot\left(\right.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a \qquad \text{tang}\left(\right.$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a \qquad \cot\left(\right.$$

$$\sin(2\pi-a)=-\sin a \qquad \text{tang}$$
$$\cos(2\pi-a)=\cos a \qquad \cot$$

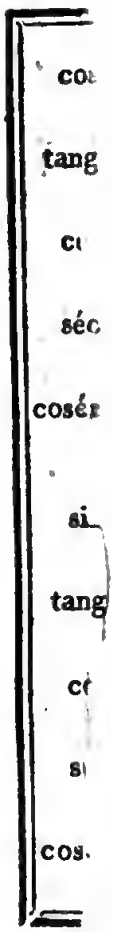
$$\sin(2k\pi+a)=\sin a \qquad \text{tang}$$
$$\cos(2k\pi+a)=\cos a \qquad \text{co}$$

$$\sin(2k\pi-a)=-\sin a \qquad \text{tang}($$
$$\cos(2k\pi-a)=\cos a \qquad \cot$$

$$\sin\{(2k+1)\pi+a\}=-\sin a \qquad \text{tang}\{(2k+$$
$$\cos\{(2k+1)\pi+a\}=-\cos a \qquad \cot\{(2k+$$

$$\sin\{(2k+1)\pi-a\}=\sin a \qquad \text{tang}\{(2k+$$
$$\cos\{(2k+1)\pi-a\}=-\cos a \qquad \cot\{(2k+$$

$$\sin(-a)=-\sin a \qquad \text{ta}$$
$$\cos(-a)=\cos a$$



Pour convertir les parties décima

		0. 5.		1. 6.	
Degrés.	0	0° 45°	0′	9°54°	0′
	1	0 45	54	9 54	54
	2	1 46	48	10 55	48
	3	2 47	42	11 56	42
	4	3 48	36	12 57	36
	5	4 49	30	13 58	30
	6	5 50	24	14 59	24
	7	6 51	18	15 60	18
	8	7 52	12	16 61	12
	9	8 53	6	17 62	6
Minutes.	0	0′ 27′	0″0	5′ 32′	24″0
	1	0 27	32.4	5 32	56.4
	2	1 28	4.8	6 33	28.8
	3	1 28	37.2	7 34	1.2
	4	2 29	9.6	7 34	33.6
	5	2 29	42.0	8 35	6.0
	6	3 30	14.4	8 35	38.4
	7	3 30	46.8	9 36	10.8

deux droites, *AV*, par exemple, la position de ces points sera fixée lorsqu'on connaîtra la partie *MP* de la parallèle, com-

APPLICATION
DE L'ALGÈBRE
A LA GÉOMÉTRIE.

PRÉLIMINAIRE.

1. Il est aisé de concevoir comment le calcul est applicable à la solution des problèmes de Géométrie, car on ne peut avoir à déterminer que des *longueurs*, des *aires*, des *volumes*, des *angles* et des *points*; or les longueurs, les aires et les volumes sont des grandeurs évaluables en nombres, et la *Trigonométrie* fournit les moyens de ramener la considération des angles à celle des lignes connues sous le nom de *lignes trigonométriques*. Il ne reste donc qu'à faire voir comment on peut déterminer la position des points.

2. Pour déterminer la position d'un point sur un plan, concevons dans ce plan deux droites indéfinies $X'AX$, YAY' (fig. 1) qui se coupent en A sous un angle quelconque, mais dont la position et l'inclinaison soient connues. Si par le point M, qu'il s'agit de déterminer, on imagine une parallèle MP à l'une des deux droites, AY, par exemple, la position de ces points sera fixée lorsqu'on connaîtra la partie MP de la parallèle, com-

prise entre le point M et l'autre droite AX, et la partie AP que la parallèle intercepte sur cette dernière. La partie AP se nomme l'*abscisse*, la ligne MP l'*ordonnée* du point M. Si par ce point on mène MQ parallèle à AX, la partie AQ interceptée par cette parallèle est évidemment égale à l'ordonnée MP, tandis que MQ est égale à l'abscisse AP. Ainsi les abscisses et les ordonnées peuvent se compter sur chacune des lignes AX, AY. Celle sur laquelle se comptent les abscisses, se nomme *axe des abscisses* ; celle sur laquelle se comptent les ordonnées, *axe des ordonnees*. L'abscisse et l'ordonnée portent le nom commun de *coordonnées*, et par cette raison, les axes celui d'*axes des coordonnees;* le point d'intersection des deux axes s'appelle *origine*.

3 Mais jusqn'à présent rien ne détermine dans lequel des quatre angles XAY, $X'AY$, $X'AY'$, XAY' le point est situé; car en supposant $AP' = AP$ et $MP = M'P' = M''P' = M'''P$, ce point pourrait être indifféremment M, M', M'', M''', tant que l'on ne fera attention qu'aux valeurs numériques de l'abscisse et de l'ordonnée. Mais d'après ce que nous avons dit en Algèbre et en Trigonométrie, l'opposition de signe exprimant une opposition dans la direction, si l'on regarde comme positive l'abscisse AP, l'abscisse AP' sera négative; et de même, si MP ou AQ est positive, $M'''P$ ou AQ' est négative. Ainsi, une fois que l'on aura fixé le sens dans lequel on regarde les abscisses et les ordonnées comme positives, la position du point sera entièrement déterminée.

L'analogie de cette méthode, avec ce que nous avons dit en Trigonométrie, sur les signes des *sinus* et *cosinus*, se laisse appercevoir au premier abord, et peut en faciliter l'intelligence.

4. Imaginons maintenant une suite de points situés sur un même plan; chacun d'eux aura son abscisse et son ordonnée; et si ces points forment une ligne continue, il est aisé de voir qu'en prenant l'abscisse à volonté, et menant par son extrémité une parallèle à l'axe des ordonnées, on déterminera l'ordonnée

correspondante à l'abscisse arbitraire, ce sera la partie de cette parallèle comprise entre la ligne et l'axe des abscisses. Donc, dans ce cas, l'ordonnée, quoique variable ainsi que l'abscisse, dans tout le cours de la ligne tracée sur le plan, sera dépendante, et par conséquent *fonction* de l'abscisse. Cela posé, si cette fonction est la même pour tous les points, c'est-à-dire, si une ordonnée étant exprimée en fonction de l'abscisse correspondante, il suffit de remplacer dans la fonction cette abscisse par celle d'un autre point pour avoir l'ordonnée de ce point, l'équation qui aura lieu ainsi entre l'ordonnée et l'abscisse d'un point quelconque, est ce que l'on appelle l'*équation de la ligne*. Pour la trouver, il faut connaître une propriété commune à tous ses points, et exprimer cette condition de manière à lier entre elles l'abscisse et l'ordonnée.

On voit par ce qui a été dit (n° précéd.), que le cosinus d'un arc est proprement l'abscisse de l'extrémité de cet arc, et que le sinus en est l'ordonnée, les deux axes étant supposés rectangulaires et l'origine au centre : d'ailleurs si le cosinus d'un certain arc est x, et que son sinus soit y, on a (Trig. n° 10)

$$y = \pm\sqrt{(r^2 - x^2)};$$

mais le sinus ou l'ordonnée étant ainsi exprimé en fonction du cosinus ou de l'abscisse, pour avoir le sinus y' d'un autre arc dont le cosinus serait x', il suffira de substituer x' au lieu de x, ensorte que la fonction reste la même pour un arc quelconque. Si l'on suppose donc que x reçoive toutes les valeurs possibles qui puissent convenir à un cosinus, $\pm\sqrt{(r^2 - x^2)}$ donnera pour chacune d'elles la valeur du sinus correspondant. L'équation

$$y^2 + x^2 = r^2$$

est donc l'équation de la circonférence dont le rayon est r, pourvu que les axes soient perpendiculaires, et que l'origine soit au centre.

5. Réciproquement, une équation étant donnée entre deux variables, elle peut toujours être considérée comme étant

l'équation d'une certaine ligne, en regardant l'une des variables comme l'abscisse, et l'autre comme l'ordonnée. Pour construire cette ligne, après avoir pris les deux axes, on donnera des valeurs arbitraires à celle des variables que l'on prend pour abscisse, et il en résultera une ou plusieurs valeurs pour l'ordonnée. Les extrémités de ces ordonnées seront autant de points de la ligne, qu'on appelle alors le *lieu géométrique* de l'équation.

6. On distingue les lignes, d'après la nature de leur équation, en lignes *algébriques* et lignes *transcendantes*. Nous ne nous occuperons point de ces dernières.

Les lignes algébriques se divisent en *ordres* ou *degrés*, d'après le degré de leur équation. Ainsi les lignes du premier degré ou du premier ordre, sont celles dont l'équation est du premier degré ; les lignes du second ordre sont celles dont l'équation est du second degré, etc. Nous ne nous arrêterons dans ce Traité, qu'aux lignes du premier et du second ordre.

Lorsque l'équation d'un certain degré peut appartenir à des lignes essentiellement différentes par leur forme ou par leurs propriétés, d'après des modifications de l'équation générale, les lignes de cet ordre se subdivisent en *genres ;* chaque genre renferme les lignes qui jouissent des mêmes propriétés, et a une équation qui lui est particulière, sans cesser cependant d'être générale. Enfin, dans chaque genre, il y a un nombre indéfini d'*espèces* dépendantes des valeurs particulières que l'on attribue aux coefficiens.

7. L'équation d'une ligne dépendant à la fois de la forme qu'elle affecte et de sa position par rapport aux axes, on conçoit que l'équation doit changer, si l'on prend des axes différens. Pour opérer ce changement, il faut calculer les coordonnées de cette ligne relatives aux premiers axes, en fonction des coordonnées relatives aux nouveaux axes, et substituer ces valeurs dans l'équation. Cette opération se nomme *transformation des axes*.

La recherche de ces valeurs, qui est l'objet du n° suivant,

fait voir que si l'on nomme x, y les coordonnées primitives, t, u les nouvelles coordonnées, les valeurs de x, y en fonction de t, u, sont de la forme

$$x = mu + nt + p,$$
$$y = m'u + n't + p',$$

m, n, p, m', n', p' étant des quantités connues dépendantes de la position du nouveau système d'axes par rapport au premier. Ces expressions étant du premier degré en t, u, il en résulte que la substitution ne changera pas le degré de l'équation.

Mais parmi toutes les formes que peut prendre l'équation d'une certaine ligne rapportée à différens systèmes d'axes, on conçoit qu'il y en a de plus simples que les autres. Ainsi, étant donnée l'équation d'une ligne rapportée à de certains axes, on peut chercher quels sont les systèmes d'axes qui donneraient une équation plus simple : il est même facile d'apercevoir la marche que l'on doit suivre. En effet, lorsque la position des nouveaux axes est donnée, on connaît les coordonnées de la nouvelle origine, et les angles que font les nouveaux axes avec l'un des premiers ; alors m, n, p, m', n', p' sont des fonctions de quantités données : mais quand la position des nouveaux axes est indéterminée, ces mêmes quantités sont arbitraires ; et comme, après la substitution, elles font partie des coefficiens de l'équation, on pourra en disposer de manière à la simplifier, en supposant, par exemple, que l'introduction de ces quantités anéantisse quelques-uns des termes.

Passons maintenant à la recherche des formules dont nous avons supposé l'existence.

Supposons d'abord que les nouveaux axes $A'X'$, $A'Y'$ (fig. 2) soient parallèles aux axes primitifs AX, AY. Soit M un point quelconque de la ligne ; faisons $AP = x$, $MP = y$, $A'P' = x'$, $MP' = y'$; nommons p et q les coordonnées Ap, $A'p$ de la nouvelle origine A' ; on aura évidemment

$$x = x' + p, \quad y = y' + q.$$

Ainsi, pour passer d'un système d'axes quelconques à un système d'axes parallèles, il faut ajouter aux coordonnées primitives celles de la nouvelle origine, prises comme de droit avec leurs signes.

Il suit de là que, quelle que soit la direction des nouveaux axes, on pourra concevoir qu'on ne fasse d'abord que changer l'origine, et qu'ensuite on change seulement la direction des axes; de sorte qu'il suffira de faire le calcul comme si l'origine restait la même, et aux valeurs que l'on obtiendra, on ajoutera seulement les coordonnées de la nouvelle origine.

Soient donc maintenant les axes AX, AY (fig. 3) auxquels le point M était primitivement rapporté, et que l'on prenne les axes quelconques AT et AU. Soit ψ l'angle XAY des axes primitifs, α l'angle que fait avec l'axe AX le nouvel axe AT, et β l'angle que fait l'axe AU. Soient encore $AP = x$, $MP = y$ les coordonnées du point M par rapport aux axes primitifs, $AQ = t$, $MQ = u$ les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes.

Menons par le point Q les droites Qq, Qp respectivement parallèles aux axes AX, AY, on aura

$$y = Mq + qP = Mq + Qp,$$
$$x = Ap + pP = Ap + Qq :$$

or les triangles MQq, AQp donnent (Trig. n° 35)

$$Mq = \frac{u \sin \beta}{\sin \psi}, \qquad Qp = \frac{t \sin \alpha}{\sin \psi},$$
$$Ap = \frac{t \sin (\psi - \alpha)}{\sin \psi}, \quad Qq = \frac{u \sin (\psi - \beta)}{\sin \psi},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{t \sin \alpha + u \sin \beta}{\sin \psi} \\ x &= \frac{t \sin (\psi - \alpha) + u \sin (\psi - \beta)}{\sin \psi} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Si l'angle ψ est droit, $\sin (\psi - \alpha)$ et $\sin (\psi - \beta)$ deviennent

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, on a d'ailleurs $\sin\Psi = 1$; donc les formules se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} y &= t\sin\alpha + u\sin\beta \\ x &= t\cos\alpha + u\cos\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Si l'angle des axes primitifs étant toujours quelconque, celui des nouveaux axes est droit, comme cet angle est égal à $\beta - \alpha$, on a $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, et partant, $\sin\beta = \cos\alpha$; de même $\sin(\Psi - \beta) = \sin\left(\Psi - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\Psi - \alpha)$; donc, dans ce cas, les formules deviennent

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{t\sin\alpha + u\cos\alpha}{\sin\Psi} \\ x &= \frac{t\sin(\Psi-\alpha) - u\cos(\Psi-\alpha)}{\sin\Psi} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Si les deux systèmes sont à angle droit, les formules (3) donnent

$$\left.\begin{aligned} y &= t\sin\alpha + u\cos\alpha \\ x &= t\cos\alpha - u\sin\alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Au reste, ces différentes formules peuvent se trouver directement pour chaque cas, en imitant ce que nous avons fait pour celui où les angles sont quelconques.

9. Le degré d'une ligne étant connu, il est clair que l'on trouvera l'équation particulière à cette ligne, en déterminant convenablement les coefficiens de l'équation générale de ce degré. Partant, si l'on veut déterminer une ligne de cet ordre, et sa position par rapport aux axes, au moyen de certaines conditions auxquelles elle doit satisfaire, ces conditions doivent être en même nombre que les coefficiens de l'équation générale.

10. On voit par là comment on peut exprimer par le calcul qu'une ligne satisfait à des conditions données; il faut déduire de ces conditions des relations entre les coefficiens de l'équation de cette ligne et les quantités données par l'état de la question.

Par exemple, on exprime qu'une ligne passe par un point donné, en exprimant que les coordonnées de ce point satisfont à l'équation de la ligne. Si elle doit passer par plusieurs points, on aura autant d'équations analogues qu'il y a de points. Les inconnues étant les coefficiens, n'entreront qu'au premier degré; ainsi le problème sera toujours possible; mais on voit en même temps que l'on ne peut faire passer une ligne d'un certain ordre par plus de points qu'il n'y a de coefficiens dans l'équation générale de cet ordre.

Si deux lignes se coupent, il est évident qu'à leurs points d'intersection elles auront mêmes coordonnées; ainsi leurs équations auront lieu simultanément, en y supposant mêmes valeurs aux variables qui représentent les coordonnées. Donc en éliminant entre ces deux équations, on déterminera les coordonnées des points d'intersection des deux lignes.

Réciproquement, lorsque la solution d'un problème à deux inconnues conduit à deux équations entre lesquelles il faudrait éliminer, au lieu d'exécuter cette élimination, on peut regarder les inconnues comme des coordonnées, construire séparément les lignes auxquelles appartiennent ces équations, et les coordonnées des points où elles se coupent donneront les valeurs cherchées, et même le point cherché, si les inconnnes sont effectivement les coordonnées d'un point qu'il s'agit de déterminer. Dans les deux cas, il y a autant de solutions réelles que de points communs aux deux lignes, de sorte que si elles ne se coupaient pas, le problème proposé serait insoluble.

Ce que nous venons de dire suffit pour faire pressentir comment la considération des équations des lignes peut servir à la solution des problèmes de Géométrie. Cette marche est générale et sûre; il n'y a pas de problème qu'on ne puisse mettre en équation de cette manière, pourvu que l'on sache lire dans l'énoncé les conditions de la question, on que la solution ne sorte pas des bornes de l'analyse ordinaire. Mais cette méthode, préférable en général par sa fécondité, conduit quelquefois à des calculs très-longs, surtout quand elle n'est pas

appliquée avec adresse; aussi est-il bon de s'exercer à trouver des solutions puisées dans les principes établis en Géométrie et en Trigonométrie. Nous aurons soin, lorsqu'il y aura lieu, d'appliquer les différentes méthodes, autant qu'il sera possible de le faire, sans donner trop d'extension à ce sujet.

11. Tant qu'aucune circonstance particulière ne déterminera l'inclinaison des axes, nous supposerons qu'ils soient rectangulaires entre eux. Nous imaginerons aussi l'axe des abscisses horizontal; que les abscisses positives se portent à droite, et les ordonnées positives au-dessus de l'axe des abscisses.

Enfin nous consacrerons les lettres x, y aux coordonnées rectangulaires, x étant toujours l'abscisse et y l'ordonnée, et les lettres t, u aux coordonnées obliques.

12. Quelquefois, au lieu de rapporter les lignes à deux axes, on détermine chacun de leurs points par leur distance variable à un point fixe qu'on nomme *pôle*, et par l'angle aussi variable que fait cette distance avec une droite donnée de position. L'équation prend alors le nom d'*équation polaire*.

Il est aisé de passer de l'équation d'une ligne rapportée à des axes à l'équation polaire. Soit π le pôle (fig. 4), p et q ses coordonnées, z le rayon variable πM, et φ l'angle variable $M\pi S$, πS étant supposée parallèle à AX. On a

$$x = p + pP, \quad y = q + qM :$$

or (Trig. n° 35) $pP = \pi q = z\cos\varphi$, $qM = z\sin\varphi$, d'où

$$x = p + z\cos\varphi,$$
$$y = q + z\sin\varphi.$$

Si l'on veut au contraire passer de l'équation polaire à l'équation aux axes rectangulaires, on tire facilement des formules précédentes

$$z = \sqrt{(\overline{x-p}^2 + \overline{y-q}^2)}, \quad \text{tang}\,\varphi = \frac{y-q}{x-p},$$

et de là $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, etc.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes du premier ordre.

PARAGRAPHE PREMIER.

Discussion de l'Équation.

13. L'ÉQUATION générale du premier degré à deux inconnues est

$$Ay + Bx + C = 0 \ldots\ldots\ldots (a)$$

ou, divisant par A, et faisant $\frac{B}{A} = -a$, $\frac{C}{A} = -b$,

$$y = ax + b \ldots\ldots\ldots (b).$$

On tire de là

$$\frac{y-b}{x} = a :$$

or si BMM' etc.(fig. 5), est la ligne à laquelle appartient cette équation, et que par le point B distant de l'origine A de la quantité $AB = b$, on mène BC parallèle à AX, il résulte de la relation $\frac{y-b}{x} = a$, que le rapport $\frac{y-b}{x}$ est constant, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{Mp}{Ap} = \frac{M'p'}{AP'} = \frac{M''P''}{AP''} = \text{etc.}$$

ou

$$\frac{Mp}{Bp} = \frac{M'p'}{Bp'} = \frac{M''p''}{Bp''} = \text{etc.}$$

propriété caractéristique de la ligne droite. Et d'ailleurs, si l'on supposait que la ligne droite qui passe par les points M, M', ne passât pas par le point M'', mais qu'elle rencontrât l'ordonnée $M''P''$ en m'', on aurait $\frac{MP'}{Bp'} = \frac{m''p''}{Bp''}$, et partant, $m''p'' = M''p''$. Donc enfin l'équation

$$y = ax + b$$

est celle d'une ligne droite qui rencontre l'axe des ordonnées, à un point dont l'ordonnée est b : si les axes sont rectangulaires, il est évident que a est la tangente de l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses. Si les axes sont obliques, le rapport $\frac{Mp}{Bp}$ est égal à $\frac{\sin MBp}{\sin BMp}$, c'est-à-dire au quotient du sinus de l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses, divisé par le sinus de l'angle qu'elle fait avec l'axe des ordonnées.

Ainsi, en nommant θ l'angle que fait la droite avec l'axe des abscisses, ψ l'angle des axes, on aura pour l'équation de la ligne droite rapportée à des axes obliques,

$$u = \frac{\sin(\psi - \theta)}{\sin\theta}\, t + b',$$

b' étant l'ordonnée à l'origine.

14. On peut arriver au même résultat par la transformation des axes.

En supposant la ligne à laquelle appartient l'équation (a) rapportée aux axes rectangulaires AX, AY (fig. 6), nous commencerons par changer l'origine sans changer l'inclinaison des axes; il faut (n° 8) faire dans l'équation

$$x = x' + p, \quad y = y' + q;$$

ce qui la change en

$$Ay' + Bx' + Aq + Bp + C = 0.$$

Il n'y a ici qu'une seule hypothèse à faire pour simplifier l'équation, c'est qu'on ait

$$Aq + Bp + C = 0,$$

supposition qui réduit l'équation à

$$Ay' + Bx' = 0 \ldots\ldots\ldots (a')$$

La condition $Aq + Bp + C = 0$ ne suffit pas pour déterminer p et q; elle exige seulement (n° 10) que la nouvelle origine soit prise sur la ligne elle-même, puisque les coordonnées p et q satisfont à l'équation de cette ligne.

Si nous passons maintenant des axes rectangulaires $A'X'$, $A'Y'$ à des axes $A'T$, $A'U$ dont l'inclinaison soit indéterminée, il faudra (n° 8) faire

$$y' = t \sin \alpha + u \sin \beta,$$
$$x' = t \cos \alpha + u \cos \beta,$$

α et β étant les angles que font avec l'axe des x' celui des t et celui des u respectivement. L'équation (a') devient

$$(A \sin \alpha + B \cos \alpha)\, t + (A \sin \beta + B \cos \beta)\, u = 0.$$

Il semble d'abord qu'au moyen des indéterminées α et β, on puisse anéantir absolument l'équation; mais les hypothèses

$$A \sin \alpha + B \cos \alpha = 0,$$
$$A \sin \beta + B \cos \beta = 0,$$

donnant

$$\text{tang}\, \alpha = -\frac{B}{A}, \qquad \text{tang}\, \beta = -\frac{B}{A};$$

si on les faisait à-la-fois, il s'ensuivrait $\text{tang}\, \alpha = \text{tang}\, \beta$, d'où $\alpha = \beta$; les deux axes du nouveau système se confondraient donc, et ne formeraient qu'une seule et même ligne droite,

ce qui est absurde : ainsi elles ne peuvent être faites que séparément, c'est-à-dire, l'une ou l'autre seulement.

La première donne

$$(A \sin\beta + B \cos\beta)\, u = 0, \quad \text{ou} \quad u = 0;$$

elle détermine la position de l'axe des t, et laisse l'axe des u indéterminé : or l'équation $u = 0$ est évidemment celle de l'axe des t, car elle appartient à tous les points pour lesquels l'ordonnée est nulle, l'abscisse étant d'ailleurs quelconque : donc la ligne à laquelle appartient l'équation (a) est une *ligne droite* qui fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $-\frac{B}{A}$.

La seconde hypothèse donne

$$t = 0;$$

elle détermine la position de l'axe des u, et laisse l'axe des t indéterminé ; et comme $t = 0$ est l'équation de l'axe des u, on retombe sur le même résultat.

D'ailleurs, quand on fait $x = 0$, on trouve $y = -\frac{C}{A}$; donc $-\frac{C}{A}$ est l'ordonnée à l'origine.

15. Le premier *ordre* ne renferme par conséquent qu'un seul *genre* et même qu'une seule espèce, car en faisant varier les coefficiens, on ne peut que changer la position de la droite par rapport aux axes. L'équation pouvant se mettre sous la forme

$$y = ax + b$$

ne renferme que deux coefficiens a et b; ainsi il faudra deux conditions pour déterminer la ligne droite, ce qu'on sait déjà par la Géométrie.

Si $b = 0$, la droite a pour équation

$$y = ax,$$

et passe alors par l'origine.

Si $a=0$, l'équation devient $y=b$, et la droite est évidemment parallèle à l'axe des abscisses. On voit de même que $x=c$ serait l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

16. Pour construire une ligne droite dont l'équation est

$$y=ax+b,$$

on peut se servir directement de l'ordonnée à l'origine b, et du coefficient de x qui est la tangente de l'angle que fait cette droite avec l'axe des abscisses. Mais comme on connaît déjà le point où elle rencontre l'axe des ordonnées, on peut encore, en faisant $y=0$, chercher le point qui se trouve sur l'axe des x; cette supposition donne

$$ax+b=0, \quad \text{ou} \quad x=-\frac{b}{a}:$$

on aura ainsi deux points qui détermineront la ligne dont on a l'équation

17. Pour trouver l'équation polaire de la ligne droite, il faut dans l'équation

$$y=ax+b,$$

faire (n° 12),

$$x=p+z\cos\varphi, \quad y=q+z\sin\varphi.$$

Elle devient

$$z(\sin\varphi-a\cos\varphi)+q-ap-b=0,$$

ou

$$z=-\frac{q-ap-b}{\sin\varphi-a\cos\varphi}.$$

Si l'on fait $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on a $\sin\varphi=1$, $\cos\varphi=0$; ainsi, pour cette valeur de φ,

$$z=-(q-ap-b);$$

donc le numérateur de la valeur de z est le rayon perpendi-

culaire sur l'axe ; si nous le désignons par r, l'équation polaire de la ligne droite sera

$$z = \frac{\sin\varphi - a\cos\varphi}{r},$$

où a est toujours la tangente de l'angle que fait la droite avec l'axe, et r le rayon qui est à angle droit avec cet axe.

§ II.

Détermination de la ligne droite par des conditions élémentaires, combinaison des lignes droites entre elles.

18. *Trouver l'équation d'une ligne droite qui passe par deux points donnés.*

Soient x', y' et x'', y'' les coordonnées des deux points donnés ; l'équation cherchée sera de la forme

$$y = ax + b,$$

et puisqu'elle doit passer par les deux points, on aura (n° 10) les équations

$$y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b,$$

où a et b sont les inconnnes. La marche la plus naturelle est d'éliminer successivement a et b entre ces équations, ce qui conduit aux valeurs

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \quad b = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''},$$

et par conséquent à l'équation

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''};$$

mais cette équation se présentera sous une forme plus symé-

trique et plus facile à retenir, en faisant le calcul de la manière suivante.

Si de l'équation $y = ax + b$, on retranche l'équation $y' = ax' + b$, il vient

$$y - y' = a(x - x'),$$

équation d'une ligne droite qui fait avec l'axe un angle indéterminé, mais qui passe par le point donné; cette forme nous servira fréquemment dans la suite. D'ailleurs, la droite passant par le point dont les coordonnées sont x'', y''; ces quantités doivent satisfaire à la dernière équation; on a donc

$$y'' - y' = a(x'' - x'), \quad \text{ou} \quad a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'},$$

d'où, en substituant cette valeur,

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Il est facile au reste de se convaincre *à posteriori*, que les coordonnées x', y' et x'', y'' satisfont à cette équation.

Si les points par lesquels passe la droite sont M', M'' (fig. 7), on voit, en menant la droite $M''m$ parallèle à AX, que la partie $M'm''$ de cette droite comprise entre les deux points, est exprimée par

$$\sqrt{(\overline{M'm}^2 + \overline{M''m}^2)} = \sqrt{\{(y' - y'')^2 + (x' - x'')^2\}},$$

x', y', x'', y'', étant toujours pris avec leurs signes.

19. *Deux droites étant données par leurs équations, trouver l'angle qu'elles font entre elles.*

Soient

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b';$$

les équations des droites BM, CM (fig. 8) respectivement; on a

$$a = \text{tang } MBX, \quad a' = \text{tang } MCX.$$

Si l'on mène CD parallèle à BM, l'angle DCM sera égal à

l'angle BMC; mais $DCM = MCX - MBX$. Donc la tangente de l'angle cherché est égale à la tangente de la différence des deux angles MCX et DCX, ce qui donne (Trigon. n° 15).

$$\text{tang } BMC = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

20. *Par un point donné, mener une droite qui fasse un angle donné avec une droite donnée, c'est-à-dire, trouver son équation?*

Soit

$$y = ax + b,$$

l'équation de la droite donnée, m la tangente de l'angle, x', y' les coordonnées du point; l'équation de la droite cherchée sera (n° 18)

$$y - y' = a'(x - x'),$$

où il ne reste que a' à déterminer. Observons à cet égard, que dans le n° précédent nous avons supposé que l'angle MCX fût plus grand que l'angle MBX, ou, ce qui revient au même, que le point C se trouvât placé à droite du point B. Si le contraire avait lieu, c'est-à-dire, si le point C était en C', on aurait

$$\text{tang } BMC' = \frac{a - a'}{1 + aa'},$$

expression qui ne diffère de la précédente que par le signe. Il est clair d'ailleurs que dans ce changement, la droite MB est restée immobile, et que l'angle BMC, en devenant BMC', a seulement passé de la droite à la gauche relativement à la ligne MB. Cette différence de signe se présente d'elle-même, et ne peut faire éprouver aucune difficulté, quand on cherche l'angle BMC; mais dans la question qui nous occupe, l'angle BMC est connu, et si nous supposons que la droite donnée soit BM, il n'y a pas de raison pour imaginer que l'angle BMC soit fait plutôt d'un côté que de l'autre de la droite BM. On

doit donc admettre également les deux hypothèses, et l'on aura

$$\pm\frac{a'-a}{1+aa'}=m, \quad \text{ou} \quad \frac{a'-a}{1+aa'}=\pm m;$$

d'où

$$a'=\frac{a\pm m}{1\mp am},$$

en prenant m avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que l'angle doit être fait à droite ou à gauche de la droite donnée.

Si la droite cherchée devait être perpendiculaire sur la droite donnée, on aurait $m=\frac{1}{0}$; ainsi l'équation

$$\frac{a'-a}{1+aa'}=\pm m$$

donne

$$1+aa'=0, \quad \text{ou} \quad a'=-\frac{1}{a},$$

comme on le sait par la Trigonométrie.

Si elle devait être parallèle à la droite donnée, on aurait $m=0$, et partant, $a'=a$; ce qui est évident par soi-même, car les deux droites font des angles égaux avec l'axe des abscisses.

21. Le problème du n° 18 a lieu de la même manière, quand même les angles ne sont pas rectangulaires entre eux; mais les deux derniers n'ont plus lieu, puisque la solution repose sur la propriété qu'a le coefficient de x d'être la tangente de l'angle que la droite fait avec l'axe. Mais nous avons vu (n° 13) que dans l'équation

$$u=at+b,$$

on a $a=\frac{\sin\theta}{\sin(\psi-\theta)}$, ψ étant l'angle des axes, et θ celui que la droite fait avec l'axe des t: d'où l'on tire, en développant

le dénominateur, et divisant haut et bas par $\cos\theta$,

$$a = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sin\psi - \operatorname{tang}\theta\cos\psi};$$

et en résolvant cette équation par rapport à $\operatorname{tang}\theta$,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a\sin\psi}{1 + a\cos\psi};$$

or quelle que soit l'inclinaison des axes, l'angle de deux droites est toujours égal à la différence des angles que font ces droites avec l'axe des abscisses; ainsi l'équation d'une autre droite étant

$$u = a't + b',$$

et θ' l'angle qu'elle fait avec l'axe; on aura de même

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{a'\sin\psi}{1 + a'\cos\psi};$$

d'où

$$\operatorname{tang}(\theta' - \theta) = m = \frac{(a' - a)\sin\psi}{1 + (a + a')\cos\psi + aa'};$$

et

$$a' = \frac{a\sin\psi \pm m(1 + a\cos\psi)}{\sin\psi \mp m(a + \cos\psi)};$$

en prenant par la même raison que ci-dessus, m avec le double signe.

Si les deux droites sont perpendiculaires, m étant $\frac{1}{0}$, on doit avoir

$$1 + (a + a')\cos\psi + aa' = 0,$$

ou

$$a' = -\frac{1 + a\cos\psi}{a + \cos\psi}.$$

Si dans ces formules on supposait $\psi = \frac{\pi}{2}$, elles retomberaient dans celles des n^{os} précédens. Si les droites sont parallèles, on a $a = a'$, comme dans le cas des axes rectangulaires.

Dorénavant nous ne nous arrêterons plus au cas où les axes sont obliques ; et nous nous contenterons ici d'ajouter une observation essentielle relativement à la distance de deux points. La formule donnée pour cette distance (n° 18) suppose expressément que les axes soient rectangulaires. S'ils ne l'étaient pas, et qu'ils fissent un angle ν, il est aisé de conclure de ce qui a été dit en Trigonométrie (n° 43, II.) que cette distance est

$$\sqrt{\{(u'-u'')^2 - 2(u'-u'')(t'-t'')\cos\nu + (t'-t'')^2\}};$$

t', u' et t'', u'' étant les coordonnées obliques des deux points.

22. *Deux droites étant données par leurs équations, trouver les coordonnées de leur point d'intersection.*

D'après ce qui a été dit (n° 10), tout se réduit à éliminer entre les équations des deux droites. Soient ces équations

$$y = ax + b, \qquad y = a'x + b';$$

on trouve, opération faite,

$$x = \frac{b'-b}{a-a'}, \quad y = \frac{ab'-a'b}{a-a'}.$$

Si l'on avait $a = a'$, ces deux valeurs deviendraient infinies, ce qui prouve que dans ce cas les droites ne se rencontrent pas ; en effet, nous venons de voir qu'alors elles sont parallèles.

Si l'on avait en outre $b = b'$, chacune de ces mêmes valeurs deviendrait $\frac{0}{0}$; en effet, dans ce cas, les droites se confondent, et tous les points étant communs, on doit avoir une expression indéterminée pour les coordonnées de leur point de rencontre.

23. *Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite donnée.*

Soit

$$y = ax + b$$

l'équation de la droite ; x', y' les coordonnées du point. L'équa-

tion de la perpendiculaire sera (n° 20)

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x');$$

on trouverait la longueur cherchée, en calculant par l'élimination (n° précéd.) les coordonnées x, y du pied de la perpendiculaire, et substituant leurs valeurs dans la formule

$$\sqrt{\{(y-y')^2 + (x-x')^2\}} = d.$$

Mais on peut faire le calcul plus simplement; en effet, comme on a $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$, en substituant sur-le-champ cette valeur dans d, il en résulte

$$d = (x - x')\frac{\sqrt{(a^2+1)}}{a};$$

or l'équation $y = ax + b$ peut se mettre sous la forme

$$y - y' = a(x - x') - y' + ax' + b.$$

Cette équation combinée avec celle de la perpendiculaire, donne

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)(x - x') = y' - ax' - b,$$

d'où

$$x - x' = \frac{y' - ax' - b}{a^2 + 1}\, a,$$

et partant,

$$d = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(a^2+1)}}.$$

L'équation polaire de la ligne droite conduit à cette expression d'une manière trop simple, pour que nous négligions de le faire remarquer. Si l'on prend le pôle au point donné, l'équation polaire de la droite donnée, sera (n° 17)

$$z = -\frac{y' - ax' - b}{\sin\varphi - a\cos\varphi} = -\frac{y' - ax' - b}{\cos\varphi\,(\tang\varphi - a)};$$

or si le rayon variable est perpendiculaire sur la droite, on a $\text{tang}\varphi = -\frac{1}{a}$, d'où $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+1)}}$; donc

$$z = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(a^2+1)}},$$

comme ci-dessus.

Il est essentiel de faire attention au signe dont on affecte cette valeur de d; ce signe dépend à-la-fois du dénominateur $\sqrt{(a^2+1)}$ et du numérateur $y' - ax' - b$, $\sqrt{(a^2+1)}$ est la sécante de l'angle dont la tangente est a; or on sait (Trig.) que le signe de la sécante est le même que celui du cosinus. Ainsi cette expression doit être prise avec son signe ou avec un signe contraire, le numérateur étant supposé rester le même, suivant que le cosinus de l'angle est positif ou négatif. D'un autre côté, $y' - ax' - b'$ est la partie de l'ordonnée comprise entre le point et la droite donnée; le signe de cette distance dépend de la position du point par rapport à la droite; ainsi, pour une même droite, d doit être pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le point est au-dessus ou au-dessous de la droite. Si le point était effectivement donné, sa position déterminerait d'elle-même le signe de la fonction $y' - ax' - b$; mais quand on doit chercher, par exemple, les coordonnées x', y' par la connaissance de la longueur de d, cette fonction étant elle-même inconnue, son signe est indéterminé.

§ III.

Application de ce qui précède à la solution de quelques problèmes et à la démonstration de quelques théorèmes de Géométrie.

24. PROBLÈME I. *Étant données trois droites qui se coupent deux à deux, construire un quarré qui ait ses quatre angles sur ces trois lignes.*

Puisque le quarré cherché doit avoir ses quatre angles sur les trois droites données, l'un de ses côtés se confondra nécessairement, quant à la direction, avec une de ces droites. Ainsi, il y aura trois hypothèses à faire, en supposant alternativement que le quarré repose sur chacune des droites; mais il suffit de s'arrêter à l'une d'elles, car on traiterait les autres de la même manière.

Soient donc les trois droites qui forment, en se coupant, le triangle ABC (fig. 9); prenons pour axe des abscisses la droite AB, l'origine au point A. Si la figure $abcd$ est un quarré, on a $ad = bc = dc$; ainsi il faut trouver la valeur de l'ordonnée qui, étant la même pour les droites AC, BC, est encore égale à la différence des abscisses correspondantes.

Cela posé, la droite AC passant par l'origine et par le point C, dont la position est connue par rapport à la droite AB, et dont par conséquent nous désignerons les coordonnées par x', y', son équation sera

$$y = \frac{y'}{x'} x.$$

La droite BC passant par le point C et par le point B, dont l'ordonnée est zéro, et dont l'abscisse est égale à la ligne connue AB, que nous représenterons par c, son équation sera

$$y = \frac{y'}{x' - c}(x - c).$$

La première donne

$$x = \frac{x'y}{y'};$$

la seconde

$$x = \frac{x'y}{y'} + c - \frac{cy}{y'}:$$

Mais rien n'exprime dans les conditions du problème, que le point d soit plus près de l'origine que le point c, car on peut concevoir les points a et b en a' et b' sur les prolongemens des côtés AC, BC du triangle ABC. Ainsi, on doit

affecter la différence $c - \frac{cy}{y'}$ du double signe, puisque dans l'un des cas, la différence doit être prise dans un sens, et que dans l'autre cas elle doit être prise dans un sens contraire. On aura donc

$$\pm\left(c - \frac{cy}{y'}\right) = y,$$

ou

$$c - \frac{cy}{y'} = \pm y;$$

équation d'où l'on tire

$$y = \frac{cy'}{c \pm y'},$$

et partant,

$$x = \frac{cx'}{c \pm y'}.$$

Ces valeurs sont faciles à construire par des quatrièmes proportionnelles, et le problème a généralement deux solutions pour chaque droite, c'est-à-dire six en tout. On peut remarquer que des deux valeurs de y, celle où l'on prend le signe $+$ est toujours finie et positive, tandis que l'autre n'est finie et positive que lorsque y' est $< c$, c'est-à-dire, lorsque la base du triangle ABC est plus grande que sa hauteur : si elles sont égales, y devient infini, ainsi la seconde solution n'existe pas ; si la base est plus petite que la hauteur, y est négatif, ainsi le second quarré est au-dessous de AB.

La valeur de y est remarquable, comme ne dépendant que de la base et de la hauteur du triangle ABC, d'où il suit que *les quarrés sont les mêmes pour tous les triangles de même base et de même hauteur.*

On peut déduire de cette proposition une solution géométrique très-simple, que nous laisserons à démontrer. On prolongera la base AB de manière qu'on ait $DE = AB$, on joindra CE ; on partagera les angles CDE, CDA en deux également par les droites Dm, Dn, et menant par les points m

et n, où ces droites rencontrent CE, des parallèles à la base, elles détermineront les côtés supérieurs des quarrés. En suivant cette construction avec attention, on verra qu'elle retrace les circonstances que le calcul nous a présentées plus haut.

Le calcul conduit encore à d'autres constructions élégantes; nous ferons qu'indiquer la marche et le résultat. Si l'on cherche l'équation de la droite qui passe par le point C et par celui dont les coordonnées sont o et $\frac{cx'}{c \pm y'}$, on trouve que l'ordonnée à l'origine est $\mp c$; d'où il suit qu'en portant sur l'axe des ordonnées, tant en dessus qu'en dessous, la base du triangle, on déterminera deux points tels que les droites qui les joindront au point C coupent la base AB aux points d et d'.

On trouve que la droite qui passe par le point D et par celui dont les coordonnées sont $\frac{cx'}{c \pm y'}$, $\frac{cy'}{c \pm y'}$ a pour équation

$$y = \mp \frac{c}{x'}(x - x');$$

de sorte que l'ordonnée à l'origine est $\pm c$, et que partant, les droites menées du point D aux deux points que nous venons de déterminer, coupent le côté Ac aux points a et a'.

25. Nous avons annoncé (n° 10) un genre de solutions indépendantes des équations des lignes; nous en placerons ici deux du problème précédent qui sont puisées dans des principes différens de la Géométrie.

1°. Soit $abcd$ le quarré cherché, c la base AB, h la hauteur CD; les triangles CAB, Cab étant semblables, leurs hauteurs sont entre elles comme leurs bases; on a donc

$$Ch : CD :: ab : AB,$$

ou

$$h - z : h :: z : c,$$

et partant,

$$hz = ch - cz, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{ch}{c + h},$$

ce qui ne donne, comme on voit, qu'une des solutions; mais en supposant que le quarré soit $a'b'c'd'$; on trouvera de même

$$\frac{Ch'}{CD} = \frac{a'b'}{AB}, \text{ ou } \frac{z-h}{h} = \frac{z}{c},$$

et partant,

$$z = \frac{h}{c-h}.$$

2°. L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles Cab, adA, bcB, et à l'aire du quarré $abcd$; or l'aire du triangle $Cab = \frac{(h-z)z}{2}$; les triangles adA, bcB ont même hauteur; ainsi la somme des aires est égale à la somme des bases $c-z$, multipliée par la moitié de la hauteur commune z; l'aire du quarré est z^2; on a donc

$$\frac{ch}{2} = \frac{(h-z)z}{2} + \frac{(c-z)z}{2} + z^2,$$

ou, réduction faite,

$$(c+h)z = ch.$$

L'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des trois triangles $a'd'A$, $b'c'B$, $Ca'b'$, moins l'aire du quarré $a'b'c'd'$; or l'aire du triangle $Ca'b'$ est $\frac{(z-h)z}{2}$; les triangles $b'c'B$, $a'd'A$ ont même hauteur; ainsi la somme des aires est égale à la somme des bases $Ad' + Bc' = c + z$, multipliée par la hauteur commune z; l'aire du quarré est z^2; on a donc l'équation

$$\frac{ch}{2} = \frac{(z-h)z}{2} + \frac{(c+z)z}{2} - z^2,$$

qui devient

$$(c-h)z = ch.$$

Ces deux procédés sont extrêmement simples ; mais il est clair

que si l'on ne prévoit pas d'avance le nombre de solutions, on est exposé à n'en trouver qu'une seule ; tandis que par la méthode du n° précédent, nous avons été nécessairement conduits par la nature même du calcul, à examiner dans quel sens devait être prise la différence des abscisses, et à la prendre avec le double signe. C'est un des plus grands avantages de cette méthode, lorsqu'elle est appliquée convenablement, de donner toutes les solutions dont le problème est susceptible. Cet avantage se retrouve, il est vrai, quelquefois dans les autres, mais plus rarement. On verra aussi par la suite, que d'un autre côté, cette généralité moins grande dans les résultats, permet de les obtenir d'une manière plus simple.

26. THÉORÈME I. *Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés opposés, se coupent en un même point.*

Soit le triangle ABC (fig. 10) ; nommons toujours c le côté AB, x', y' les coordonnées du point C ; on aura, comme au n° précédent,

$$y = \frac{y'}{x'}x \; ; \quad y = \frac{y'}{x'-c}(x-c),$$

pour les équations des côtés AC, BC respectivement.

La perpendiculaire menée du point A sur la droite BC, aura pour équation (n° 20)

$$y = -\frac{x'-c}{y'}x.$$

La perpendiculaire menée du point B sur la droite AC, aura pour équation

$$y = -\frac{x'}{y'}(x-c) :$$

Si l'on fait $x = x'$ dans chacune de ces équations, on voit qu'elles s'accordent à donner

$$y = -\frac{x'(x'-c)}{y'};$$

donc elles passent toutes deux par un même point o de la troisième perpendiculaire y'.

27. PROBLÈME. II. *Étant donné un triangle* (*fig.* 11), *trouver un point* O *tel que ses distances* OM, ON, OP *aux trois côtés, soient entre elles comme trois nombres donnés* m, n, p.

Soit le triangle ABC; prenons les axes, les données, comme au n° précédent. Soit de plus O le point cherché, α, β ses coordonnées. Les équations des côtés AC, BC étant respectivement

$$y = \frac{y'}{x'}x, \quad y = \frac{y'}{x'-c}(x-c);$$

on trouvera, à l'aide de la formule du n° 23, les longueurs des perpendiculaires OM, ON; et si l'on fait attention que la position du point O étant inconnue, ces longueurs doivent être prises avec le double signe, on aura

$$ON = \pm\frac{\beta x' - \alpha y'}{\sqrt{(x'^2+y'^2)}},$$

$$OM = \pm\frac{\beta x' - \beta c + \alpha y' + cy'}{\sqrt{(x'-c)^2+y'^2)}};$$

d'ailleurs

$$OP = \beta;$$

et comme par hypothèse, on a

$$\frac{ON}{OP} = \frac{n}{p}, \quad \frac{OM}{OP} = \frac{m}{p};$$

il en résulte, en faisant passer le double signe d'un membre à un autre,

$$\frac{\beta x' - \alpha y'}{\beta\sqrt{(x'^2+y'^2)}} = \pm\frac{n}{p},$$

$$\frac{\beta x' - \alpha y' - \beta c + cy'}{\beta\sqrt{(x'-c)^2+y'^2)}} = \pm\frac{m}{p};$$

équations qui détermineront α et β. Mais elles peuvent se

simplifier beaucoup, en y faisant entrer les côtés du triangle. Si l'on fait $AC = b$, $BC = a$, on a

$$\sqrt{(x'^2 + y'^2)} = b, \quad \sqrt{(x' - c)^2 + y'^2} = a,$$

et les équations précédentes deviennent, réduction faite,

$$(px' \mp bn)\beta = py'\alpha,$$
$$(px' - cp \mp am)\beta = py'\alpha - cpy'.$$

Ces équations retranchées l'une de l'autre, donnent

$$(\pm am \mp bn + cp)\beta = cpy',$$

$$\beta = \frac{cpy'}{\pm am \mp bn + cp},$$

et partant,

$$\alpha = \frac{c(p'x \mp bn)}{\pm am \mp bn + cp};$$

expressions qui sont susceptibles de quatre valeurs, à cause de l'indépendance des signes; ainsi le problème proposé a quatre solutions. Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas général; mais nous nous arrêterons sur un cas particulier qui offre quelque intérêt, c'est celui où $p = m = n$, et l'on voit que le point cherché est alors le centre du cercle qui touche à-la-fois les trois droites qui forment le triangle.

Les valeurs de α et β deviennent

$$\beta = \frac{cy'}{\pm a \mp b + c}, \quad \alpha = \frac{c(x' \mp b)}{\pm a \mp b + c}.$$

Or cy' est le double de l'aire du triangle ABC, aire que nous représenterons par S; d'ailleurs l'équation

$$(x' - c)^2 + y'^2 = a^2$$

devient

$$x'^2 + y'^2 + c^2 - 2cx' = a^2, \text{ ou } b^2 + c^2 - 2cx' = a^2,$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c},$$

et

$$x' \mp b = \frac{(c \mp b)^2 - a^2}{2c} = \frac{(c \mp b + a)\,(c \mp b - a)}{2c};$$

ces valeurs, substituées dans les expressions précédentes, donnent

$$\beta = \frac{2S}{\pm a \mp b + c}, \quad \alpha = \tfrac{1}{8}\frac{(c \mp b + a)\,(c \mp b - a)}{\pm a \mp b + c}.$$

Si l'on sépare maintenant les quatre valeurs, en faisant pour abréger $a + b + c = 2s$, on trouvera pour β

$$\frac{S}{s-b}, \quad \frac{S}{s}, \quad -\frac{S}{s-c}, \quad \frac{S}{s-a};$$

et pour les valeurs correspondantes de α,

$$-(s-c), \quad s-a, \quad s-b, \quad s.$$

Cela posé, si l'on cherche les équations des droites qui joignent l'origine aux quatre centres, elles se réduisent évidemment à deux

$$y = -\frac{S}{(s-b)\,(s-c)}\,x, \quad y = \frac{S}{s\,(s-a)}\,x;$$

donc 1° *les centres des quatre cercles se trouvent placés deux à deux sur deux droites qui passent par l'origine.*

2°. Comme on a évidemment (Trig. n° 51)

$$\frac{-S}{(s-b)\,(s-c)} \cdot \frac{S}{s\,(s-a)} = -1,$$

ces droites sont perpendiculaires entre elles.

3°. On a (Trig. n° 44)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}} = \frac{S}{s\,(s-a)};$$

donc *l'une de ces droites coupe l'angle* A *en deux parties égales, et l'autre son supplément ;* la première est $AO'O''$; la seconde OAO''.

On peut conclure de là, ce que d'ailleurs on reconnaîtrait de la même manière, que les quatre centres se trouvent sur deux droites $BO'O$, $O''BO''$ (fig. 11 *bis*), menées par l'angle B perpendiculairement entre elles, et dont l'une le couperait en deux parties égales. Donc ces quatre droites, par leurs intersections, détermineront les centres des cercles cherchés.

Nous pourrions tirer de ce qui précède plusieurs conséquences élégantes ; mais nous ne nous étendrons pas plus loin, dans la crainte de trop nous éloigner de notre but principal.

28. Le problème du n° précédent est susceptible d'une solution très-simple, en s'aidant des principes de la Géométrie, et en distinguant les différentes positions que peut avoir le point cherché.

Soit d'abord le point O supposé dans l'intérieur du triangle ; nommons a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C ; x, y, z les perpendiculaires OM, ON, OP abaissées sur côtés. Si l'on mène les droites AO, BO, CO, on partagera le triangle ABC, en trois triangles AOB, BOC, COA, dont la somme doit être égale à l'aire du triangle ABC. Or ces aires sont respectivement $\frac{cz}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{by}{2}$; donc

$$ax + by + cz = 2S :$$

mais on a $y = \frac{n}{p}z$; $x = \frac{m}{p}z$; donc

$$(am + bn + cp)\,z = 2Sp,$$

ou

$$z = \frac{2Sp}{am + bn + cp}.$$

On connaîtra ainsi z, y, x, et il est facile de voir qu'en élevant sur le côté AB une perpendiculaire égale à z, menant

par l'extrémité de cette perpendiculaire une parallèle à AB, le point cherché doit se trouver sur cette parallèle : en opérant de la même manière sur le côté AC avec y, ou sur BC avec x, on trouvera une seconde droite qui contiendra le point O; ce point sera par conséquent à l'intersection.

Supposons en second lieu que le point O soit hors du triangle, mais compris dans l'angle A. On a

$$ABC = AOB + AOC - BOC;$$

d'où

$$cz + by - ax = 2S;$$

et achevant le calcul comme dans le cas précédent,

$$z = \frac{2Sp}{cp + bn - am};$$

et ainsi de suite.

Le cas particulier où les trois perpendiculaires doivent être égales, donne lieu à une solution extrêmement simple; car si M, N, P sont les pieds des perpendiculaires, ou les points de contact du cercle, on a $AP = AN$, $CN = CM$, $BM = BP$. Ainsi, en désignant par α, β, γ les segmens qui comprennent les angles A, B, C respectivement, on a

$$\alpha + \beta = c, \quad \beta + \gamma = a, \quad \alpha + \gamma = b;$$

d'où

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = a + b + c = 2s,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = s,$$

et partant

$$\alpha = s - a, \quad \beta = s - b, \quad \gamma = s - c.$$

Nous avons supposé ici le point dans l'intérieur du triangle; on voit facilement comment on s'y prendrait dans une autre hypothèse. Il est évident au reste que la connaissance des points M, N, P suffit pour construire le problème, et déterminer le point O.

Une remarque que nous ferons en passant, c'est que tous les segmens que donnent les quatre solutions se réduisent, quant

à la valeur, aux suivans :

$$s,\quad s-a,\quad s-b,\quad s-c.$$

29. Nous avons dit (n° 4) que l'on pouvait trouver l'équation d'une ligne, quand on connaissait une propriété de cette ligne qui fût commune à chacun de ses points. Ainsi, en prenant une propriété de la ligne droite, nous reviendrons à son équation. Il est évident que celle des droites coupées par des parallèles y conduirait immédiatement, puisque c'est l'inverse de ce que nous avons fait (n° 13). Mais souvent la propriété donnée n'indique pas ouvertement qu'elle appartient à la ligne droite, et ce n'est que par l'équation même qu'on peut le reconnaître. Nous nous contenterons d'un exemple de ces sortes de questions.

PROBLÈME III. *Quelle est la ligne dont chaque point est déterminé par l'intersection de deux droites menées de deux angles d'un triangle à des points semblablement placés sur les côtés opposés.*

Soit le triangle ABC (fig. 12) ; et comme dans les n°s précédens,

$$y=\frac{y'}{x'}x,\qquad y=\frac{y'}{x'-c}(x-c),$$

les équations des côtés AC, BC. Soit M le point d'intersection des droites Am, Bn, menées des angles A et B aux points m et n semblablement placés sur les côtés respectivement opposés, c'est-à-dire, situés sur une même parallèle au côté AB. Nommons β l'ordonnée commune aux points m et n, les abscisses seront respectivement

$$c+\frac{\beta(x'-c)}{y'},\qquad \frac{\beta x'}{y'}.$$

Cela posé, la droite Am qui passe par l'origine et par le point m, aura pour équation

$$y=\frac{\beta y'}{cy'+\beta(x'-c)}x;$$

la droite Bn passant par le point B dont l'abscisse est c et l'ordonnée zéro, et par le point n, son équation sera, calcul fait,

$$y = \frac{\beta y'}{\beta x' - cy'}(x - c).$$

Si l'on suppose que x et y soient les mêmes dans ces deux équations, elles détermineront les coordonnées du point d'intersection pour une valeur donnée de β; et si l'on élimine β entre elles, l'équation finale exprimera la relation qui existe entre les coordonnées du point d'intersection d'un quelconque de ces systèmes de droites : ce sera donc l'équation de la ligne cherchée ; on trouve qu'elle est

$$x'y - (x - c)y' = y'x - (x' - c)y,$$

ou

$$(2x' - c)y = y'(2x - c),$$

qui donne

$$y = \frac{y'}{x' - \frac{c}{2}}\left(x - \frac{c}{2}\right),$$

équation d'une droite qui passe par le point C dont les coordonnées sont x', y', et par le milieu D de AB. D'où résulte le théorème suivant :

Si l'on mène de deux angles d'un triangle tant de droites qu'on voudra à des points semblablement placés sur les côtés opposés, les droites correspondantes se rencontreront en des points situés sur la droite qui joint le troisième angle et le milieu du côté opposé.

Et, comme cas particulier, celui-ci :

Les trois droites qui joignent les angles d'un triangle et les milieux des côtés opposés, se coupent en un même point.

§ IV.

De la construction des quantités algébriques.

30. Avant de terminer ce chapitre, nous nous arrêterons un moment sur la construction des expressions auxquelles la solution d'un problème conduit pour la valeur des inconnues. Cette opération devient inutile, si l'on suppose que toutes les lignes qui entrent dans le calcul soient effectivement exprimées en nombres, puisque l'on pourra, dans ce cas, exécuter arithmétiquement toutes les opérations indiquées, et trouver par conséquent la valeur des lignes inconnues également exprimées en nombres. Mais quoiqu'il soit vrai que l'on ne puisse appliquer le calcul aux grandeurs géométriques, qu'en les remplaçant par leurs rapports à des grandeurs de même nature, il n'est pas nécessaire que cette comparaison ait été faite réellement avant de les soumettre aux calculs de l'Algèbre ; cette faculté résulte de la généralité même des opérations, et tout se réduit ensuite, pour construire les expressions algébriques auxquelles on est arrivé, à établir une figure, quelle qu'elle soit d'ailleurs, dont une des lignes exprimée analytiquement, conduise à la valeur donnée par la solution du problème.

Si l'on proposait, par exemple, de former un rectangle équivalent à un rectangle donné, en prenant pour base une ligne donnée ; on peut supposer la base et la hauteur du rectangle donné représentées par b, h, la base du rectangle cherché représentée par b' ; et nommant x la hauteur de ce dernier, on aura $x = \frac{bh}{b'}$. Or $ABCD$ (fig. 13) étant le rectangle donné, AB' la base proposée, si l'on joint le point B' et le point D, et que par le point B, l'on mène BD' parallèle à $B'D$, le point D', où cette parallèle rencontrera la direction de AD, sera déterminé de manière qu'on aura $AD' = \frac{bh}{b'}$. Cette cons-

truction extrêmement simple appartient à la Géométrie élémentaire, et c'est, comme on le voit, celle d'une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Les expressions peuvent être moins simples, et qu'il existe cependant de certaines opérations graphiques à l'aide desquelles on puisse établir une figure dont une des lignes ait pour valeur l'expression même que le calcul a donnée pour l'inconnue. Tel est l'esprit des constructions géométriques; il ne nous reste qu'à faire connaître les procédés généraux à suivre pour la construction des quantités élémentaires, nous réservant de revenir par la suite sur ce sujet d'une manière plus générale.

Nous commencerons par faire remarquer que comme on ne peut soumettre au calcul que des rapports de lignes, les élémens nécessaires des opérations algébriques seront de la forme $\frac{A}{B}$, A et B étant effectivement des lignes dont $\frac{A}{B}$ représente le rapport. Mais si a et b sont respectivement les rapports de ces lignes à l'unité, c'est-à-dire, les nombres qui les représentent, on a $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$; au lieu du rapport $\frac{A}{B}$, on peut introduire le rapport $\frac{a}{b}$. C'est même le seul moyen de réduire les opérations indiquées sur les rapports $\frac{A}{B}$, parce qu'on peut les effectuer, au moins algébriquement, sur les nombres a, b, c, etc. Si, par exemple, A, B, A', B' sont quatre lignes, on peut avoir le produit des deux rapports $\frac{A}{B} \times \frac{A'}{B'}$; et tant que l'on considère les lignes A, B, etc. comme n'étant pas exprimées en nombres, il sera impossible de réduire une pareille expression; mais une fois que l'on aura remplacé les rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ par leurs équivalens $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, l'expression $\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'}$ n'indiquant que des opérations à effectuer sur des nombres, pourra se mettre

sous la forme $\frac{aa'}{bb'}$. C'est, à proprement parler, ce passage qui constitue l'application de l'Algèbre à la Géométrie, et qui la distingue de la Géométrie des Anciens.

Il suit de là qu'il n'entre dans le calcul que des expressions de la forme $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, etc. Or si l'on imagine une équation algébrique quelconque entre un nombre quelconque de quantités, qu'à la place de ces quantités on substitue les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, etc. et que par la réduction des fractions au même dénominateur, on ramène cette équation à ne plus contenir de fractions, il est évident qu'elle sera homogène, c'est-à-dire, que tous ses termes auront le même nombre de facteurs simples. Si donc cette équation est du premier degré à une seule inconnue, et mise sous la forme

$$Mx + N = 0, \text{ d'où } x = -\frac{N}{M},$$

chacun des polynomes M et N sera homogène en particulier, et N aura à chacun de ses termes un facteur de plus que dans les termes de M; ou, autrement, le degré de N sera plus élevé d'une unité que celui de M.

Cette conclusion ne souffre aucune exception, et si dans une expression donnée ces deux circonstances ne se trouvent pas réunies, c'est qu'une certaine ligne a été prise pour unité, et qu'alors l'un des nombres a, b, a', b', etc. est devenu $= 1$. Or dans ce cas, on sait toujours quelle est la ligne que l'on a prise pour unité; et comme par la nature des constructions géométriques, la considération de l'unité n'est d'aucune importance, puisqu'elle n'est qu'une ligne comme une autre, on peut imaginer que l'on change d'unité; et représentant l'unité primitive par une certaine lettre, on introduira cette lettre dans les termes d'où elle a dû disparaître, de manière à rendre M et N homogènes, et N d'un degré plus élevé d'une

unité que M. Si, par exemple, on avait l'expression

$$x = \frac{a^3 - b^2 + c}{a + c},$$

on devrait en conclure qu'une certaine ligne a été prise pour unité ; et si on la représente par u, on aura

$$x = \frac{a^3 - b^2u + cu^2}{au + cu}.$$

Si l'équation est du second degré et ramenée a la forme

$$Mx^2 + Nx + P = 0,$$

N aura un facteur, et P deux facteurs de plus que M; et si on la ramène à la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

p sera une ligne, ou plutôt représentera une ligne, et q le produit de deux lignes, c'est-à-dire une aire, et ainsi de suite.

Nous supposerons que les expressions à construire aient été préparées, s'il est nécessaire, d'après ce qui vient d'être dit, et nous commencerons par les fonctions rationnelles. Les plus simples d'entre elles sont les monomes, et il est toujours facile de les construire à l'aide d'autant de quatrièmes proportionnelles qu'il y a de facteurs an dénominateur. Soit en effet $x = \frac{N}{M}$, N et M étant deux monomes, et N ayant un facteur de plus que M; soient n, n' deux facteurs de N, et m' un facteur de M, de manière qu'on ait $N = nn'N'$, $M = m'M'$. Il en résultera $x = \frac{nn'}{m'} \cdot \frac{N'}{M'}$, et N', M' sont du même degré. Or on peut, par la Géométrie, trouver une ligne $p = \frac{nn'}{m'}$, c'est-à-dire une quatrième proportionnelle à m', n

et n' ; on aura ainsi $x = p.\frac{N'}{M'}$. Si n'', m'' sont encore des facteurs de N', m' respectivement, ensorte qu'on ait.... $N' = n''N''$, $M' = m''M''$, il en résultera $x = \frac{n''p}{m''}.\frac{N''}{M''}$, ou en faisant $\frac{n''p}{m''} = p'$, $x = p'.\frac{N''}{M''}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs.

Si le numérateur et le dénominateur sont polynomes, soient A, B, C, etc. les différens termes du numérateur P, Q, R, etc. ceux du dénominateur; soit encore a un facteur de A, et p un facteur de P, ensorte qu'on ait $A = aA'$, $P = pP'$; on supposera

$$B = bA', \quad C = cA', \text{ etc.} \quad Q = qP', \quad R = rP', \text{ etc.},$$

b, c, etc. q, r, etc. qui sont inconnues, se détermineront par ces suppositions mêmes, et l'on aura

$$b = \frac{B}{A'}, \quad c = \frac{C}{A'}, \text{ etc.} \quad q = \frac{Q}{P'}, \quad r = \frac{R}{P'},$$

expressions qui se construisent par ce qui vient d'être dit. Cela fait, la valeur de x devient

$$x = \frac{A'(a + b + c + \text{etc.})}{P'(p + q + r + \text{etc.})}$$

qui se construit aussi par les mêmes principes.

Il est aisé de conclure de là que si chaque terme du dénominateur est du degré n, qu'il y ait p termes au numérateur, q au dénominateur, le nombre total des quatrièmes proportionnelles qu'il faut construire, est en général

$$np + (n - 1)(q - 1).$$

Mais il y a des cas où une simple décomposition suffit pour ramener l'expression à une forme directement constructible.

Soient, par exemple, les deux quantités

$$\frac{a^2-b^2}{c}, \quad \frac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{b^2+2bc+c^2-a^2};$$

elles peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$\frac{(a+b)(a-b)}{c}, \quad \frac{(a+b)^2(a-b)}{(b+c+a)(b+c-a)}.$$

Pour construire la seconde expression, il aurait fallu 7 (*) quatrièmes proportionnelles, et la décomposition n'en exige que deux.

Nous avons supposé dans tout ce qui précède que l'expression à construire était celle d'une ligne : si elle appartenait à une aire, comme l'aire s'exprime par le produit des deux dimensions, le degré du numérateur serait de deux unités plus élevé que celui du dénominateur. Dans ce cas, après avoir préparé l'expression comme dans le cas précédent, et l'avoir ramenée à la forme monome, on détacherait un facteur du numérateur, de manière à avoir, par exemple, $x = a.\frac{A}{B}$: $\frac{A}{B}$ est une ligne que l'on peut représenter par b, de sorte qu'on aurait enfin $x = ab$, valeur qui se construit en formant un rectangle dont la base soit a et la hauteur b.

On voit facilement ce qu'il faudrait faire pour le cas où l'expression appartiendrait à un volume.

Quant aux expressions irrationnelles, nous ne nous occuperons ici que de celles du second degré. Or ces expressions ne peuvent être que de la forme $x = A \pm \sqrt{B}$, A étant du premier degré ou réductible au premier degré, et B du second ou réductible du second ; d'ailleurs A et B peuvent toujours, par ce qui précède, être ramenés à des monomes ; ainsi l'ex-

(*) La formule précédente donne $2.4+3.1=11$ quatrièmes proportionnelles, mais ce nombre se réduit à 7, à cause des facteurs communs.

Digitized by Google

pression de x pourra l'être à la forme

$$x = a \pm \sqrt{bc},$$

où a, b, c représentent des lignes connues. Or $\sqrt{bc}$ est (Géom.) une moyenne proportionnelle entre b et c ; nommons m cette moyenne proportionnelle, on aura enfin

$$x = a \pm m,$$

c'est-à-dire, la somme ou la différence de deux lignes.

La propriété du triangle rectangle peut servir à la construction des radicaux du second degré, puisque

$$\sqrt{(a^2 + b^2)}, \quad \sqrt{(a^2 - b^2)}$$

sont respectivement l'hypoténuse ou un côté d'un triangle rectangle. Il existe aussi, pour de certains cas, des artifices particuliers qui ne peuvent trouver place ici, mais dont nous ferons connaître quelques-uns dans le cours de cet ouvrage, à mesure que l'occasion s'en présentera.

Ces principes une fois posés, il ne reste plus qu'à choisir les lignes qui doivent servir à exécuter la construction, de manière à rendre les opérations plus simples et moins multipliées, en employant, autant qu'il est possible, les lignes mêmes de la figure, et à marquer, si l'on peut, les points cherchés par la construction elle-même. C'est en cela que consiste l'élégance des constructions, et l'habitude seule peut y conduire.

CHAPITRE II.

Des Lignes du second ordre en général.

PARAGRAPHE PREMIER.

Discussion de l'équation générale ; division des lignes du second ordre en genres.

31. L'ÉQUATION générale du second degré à deux inconnues est

$$Ay^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots (A)$$

Mais comme on sait qu'une équation à deux inconnues, lorsqu'elle passe le premier degré, peut être impossible, ou telle qu'elle détermine les deux inconnues, ou enfin qu'elle soit décomposable en facteurs du premier degré, les coefficiens de l'équation (A) peuvent être déterminés de manière que cette équation n'appartienne à aucune ligne, et même ne représente rien, ou qu'elle ne donne qu'un point, ou qu'elle appartienne au système de deux lignes droites. Nous nous proposons ici de déterminer à quels caractères on peut reconnaître ces trois cas, et ce que représente l'équation dans les autres.

32. En multipliant l'équation (A) par $4A$, et rassemblant les termes affectés de la première puissance de y, on verra

facilement qu'elle peut se mettre sous la forme

$$(2Ay+Bx+D)^2-(B^2-4AC)x^2 \\ -2(BD-2AE)x-(D^2-4AF)=0,$$

ou, si l'on fait pour abréger

$$B^2-4AC=G,\quad BD-2AE=H,\quad D^2-4AF=K,$$

sous la forme

$$(2Ay+Bx+D)^2-(Gx^2+2Hx+K)=0.....(B).$$

Or $Gx^2+2Hx+K$ peut lui-même se transformer en

$$\frac{1}{G}\left\{(Gx+H)^2-(H^2-GK)\right\},$$

c'est-à-dire, l'équation (B) multipliée par G, en

$$G(2Ay+Bx+D)^2-(Gx+H)^2+H^2-GK=0.$$

En développant, on trouve

$$H^2-GK=4A(AE^2+CD^2+FB^2-4ACF-BDE),$$

et partant, si l'on pose

$$AE^2+CD^2+FB^2-4ACF-BDE=\Delta, \quad (*)$$

on aura $H^2-GK=4A\Delta$, et

$$G(2Ay+Bx+D)^2-(Gx+H)^2+4A\Delta=0....(C).$$

Cela posé, on peut toujours regarder A comme positif, puisque s'il était négatif, on serait maître de changer tous les signes de l'équation : ainsi la possibilité ou l'impossibilité de cette équation ne dépend que des quantités G et Δ.

(*) Il peut être utile de remarquer que la valeur de Δ se tire facilement, et d'une manière immédiate, de l'équation (A) elle-même; car en faisant dans cette équation $y=E$ et $x=-D$, et y remplaçant F par FG, elle donne $AE^2-BDE+CD^2+F(B^2-4AC)$, qui est exactement Δ.

Supposons 1° $G<0$.

Si l'on a $\Delta<0$, tous les termes de l'équation (C) sont essentiellement négatif, quelque hypothèse que l'on fasse sur x et y; ainsi elle est absurde, et ne représente rien.

Si l'on a $\Delta=0$, l'équation (C) devient la somme de deux quantités négatives; somme qui ne peut être nulle, à moins que chacune de ces quantités ne s'anéantisse séparément. On a donc

$$2Ay+Bx+D=0, \quad Gx+H=0,$$

et ces relations déterminant x et y, il n'en résulte qu'un point.

Si l'on a $\Delta>0$, l'équation (C) devient, en faisant $G=-G'$, et changeant les signes,

$$G'(2Ay+Bx+D)^2+(G'x-H)^2-4A\Delta=0.$$

Pour qu'elle puisse avoir lieu, il faut donner à x des valeurs telles que $(G'x-H)^2$ soit $=4A\Delta$, ou $<4A\Delta$. Or si l'équation $(G'x-H)^2-4A\Delta=0$ donne pour x deux valeurs que nous désignerons par x', x'', on aura

$$(G'x-H)^2-4A\Delta=(x-x')(x-x'');$$

donc les valeurs assignables à x doivent être telles qu'elles rendent négatif le produit $(x-x')(x-x'')$. Cela posé, si x' et x'' sont de même signe, x devra être de même signe que chacune d'elles, plus grande que la plus petite, et plus petite que la plus grande; mais toute valeur intermédiaire sera convenable. Si x' et x'' sont de signe contraire, on ne peut rendre ce produit négatif qu'en prenant x positive plus petite que la racine positive, et négative plus petite que la racine négative; mais toute valeur intermédiaire sera aussi convenable. Ainsi l'équation appartient, dans ce cas, à une ligne courbe continue, mais limitée, dans le sens des abscisses, par les ordonnées correspondantes aux valeurs x', et x''. D'ailleurs la valeur de y que donne cette équation, est

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A\sqrt{G'}}\sqrt{\{4A\Delta-(G'x-H)^2\}};$$

si l'on se borne à la partie rationnelle, on a évidemment l'équation d'une droite qui fait avec l'axe des x un angle dont la tangente est $-\frac{B}{2A}$, et qui rencontre l'axe des ordonnées à une distance $-\frac{D}{2A}$ de l'origine. Ainsi, pour compléter l'ordonnée de la ligne à laquelle appartient l'équation, il faut ajouter ou retrancher à l'ordonnée de la droite la partie irrationnelle. A une même abscisse, il correspond donc deux points de la courbe; la distance entre ces deux points est évidemment double de la partie irrationnelle, et le milieu de chacune de ces distances ou *cordes* se trouve sur la droite dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A},$$

qui jouit par conséquent de la propriété de couper en deux parties égales toutes les droites menées parallèlement à l'axe des ordonnées, et terminées de part et d'autre à la courbe. On l'appelle par cette raison *diamètre*.

Lorsque le radical est nul, la courbe rencontre le diamètre; ainsi x', x'' sont les abscisses de ces points. D'un autre côté, la plus grande valeur de ce radical a lieu lorsque $G'x - H = 0$, ou lorsque $x = \frac{H}{G'}$; donc *la courbe est limitée dans le sens des ordonnées, et même rentrante et fermée.* Elle se nomme ELLIPSE.

Soit 2° $G = 0$.

L'équation (C) se réduit à

$$-H^2 + 4A\Delta = 0,$$

et s'anéantit d'elle-même, puisque $-B^2 + 4A\Delta = -GK$, ce qui devait nécessairement arriver, puisque pour passer de l'équation (B) à l'équation (C), on a multiplié la première par G. Il faut donc recourir à l'équation (B) que l'hypo-

thèse $G=0$ réduit à

$$(2Ay+Bx+D)^2-2Hx-K=0.$$

Si $H<0$, K peut être <0, $=0$ ou >0. Dans le premier cas, on ne peut attribuer à x de valeurs positives; et même en admettant les valeurs négatives, il faut que x soit, abstraction faite du signe, plus grande que $\frac{K}{2H}$; mais aussi ce point une fois passé, rien ne limite plus la valeur de l'abscisse. Dans le second cas, on peut admettre la valeur $x=0$, et toutes les valeurs négatives; dans le troisième on peut faire x positive, pourvu qu'elle soit $<\frac{K}{2H}$. Ainsi, dans les trois cas, l'équation appartient à une ligne courbe continue limitée dans le sens des abscisses positives, et infinie dans le sens des abscisses négatives. D'ailleurs la valeur

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(2Hx+K)}$$

prouve, comme ci-dessus, que la droite dont l'équation est $y=-\frac{Bx+D}{2A}$ est un diamètre; et comme rien ne limite la grandeur du radical, on voit que la courbe, après avoir rencontré ce diamètre, se prolonge indéfiniment, en s'en écartant de plus en plus, tant en dessus qu'en dessous.

Si $H=0$, on peut de même avoir $K<0$, $=0$, ou >0. Dans le premier cas, l'équation est absurde, et ne représente rien; dans le second, elle appartient à une seule ligne droite, car elle devient

$$2Ay+Bx+D=0;$$

dans le troisième, elle donne

$$2Ay+Bx+D=\pm\sqrt{K},$$

équation qui appartient au système de deux droites parallèles,

car elles font toutes deux avec l'axe des x, un angle dont la tangente est $-\frac{B}{2A}$.

Si $H>0$, tout se passe comme dans l'hypothèse où $H<0$, en changeant les abscisses positives en négatives, et réciproquement, et la courbe est seulement tournée d'un côté opposé.

Donc enfin la condition $G=0$ donne *un genre de courbes composées de deux branches infinies dans le même sens, et qui se réunissent en un même point.* Elles se nomment PARABOLES.

Soit 3° $G>0$.

Si $\Delta<0$, il est évident que l'on peut attribuer à x une valeur quelconque positive ou négative; ainsi la ligne à laquelle appartient l'équation, s'étend à l'infini dans le sens de l'axe des abscisses. D'ailleurs, en faisant $\Delta=-\Delta'$, on a

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A\sqrt{G}}\sqrt{\{(Gx+H)^2+4A\Delta'\}};$$

d'où l'on conclura encore que la droite dont l'équation est

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}$$

est un *diamètre*. Mais comme la quantité sous le radical est essentiellement positive, aucune hypothèse ne peut l'anéantir; ainsi la courbe est composée de deux parties séparées, puisqu'elle existe au-dessus et au-dessous du diamètre, sans le rencontrer. Rien ne limitant d'ailleurs la valeur du radical, la courbe s'étend indéfiniment dans le sens de l'axe des ordonnées.

Si $\Delta=0$, l'équation donne

$$2Ay+Bx+D=\pm\frac{1}{\sqrt{G}}(Gx+H)$$

qui appartient au système de deux droites concourantes.

Si $\Delta>0$, x ne pourra plus être prise tout-à-fait arbi-

trairement, il faudra qu'elle satisfasse à la condition..... $(Gx-H)^2-4A\Delta>0$, ou $=0$. Or on reconnaîtra facilement, comme pour le cas de $G<0$, que l'inverse a lieu ici, et que si x', x'' sont les valeurs de x qui donnent..... $(Gx+H)^2-4A\Delta=0$, aucun point ne répondra à l'intervalle déterminé par ces deux abscisses, mais on pourra admettre toute autre valeur de x positive ou négative, quelque grande qu'elle soit. La valeur de y déterminera un diamètre comme dans les cas précédens, et la courbe le rencontrera aux points qui correspondent aux abscisses x', x''.

Donc l'équation appartient encore *à une courbe continue qui s'étend indéfiniment dans le sens des abscisses positives et dans le sens des abscisses négatives, et qui est composée de deux parties séparées.* Elle se nomme HYPERBOLE.

33. Pour compléter l'analyse précédente, il ne nous reste qu'à examiner si l'équation (A) n'appartient effectivement à la ligne droite que dans les cas que nous avons remarqués. Or pour que la ligne représentée par l'équation (A) soit droite, il faut que cette équation coïncide avec celle de la ligne droite, et que par conséquent l'équation résultante de l'élimination s'anéantisse d'elle-même. Prenons donc l'équation générale de la ligne droite.

$$y=ax+b,$$

où a et b sont indéterminés; substituons cette valeur de y dans l'équation (A), il en résulte :

$$\left.\begin{array}{lll} Aa^2 & x^2+2Aab & x+AB^2 \\ +Ba & +Bb & +Db \\ +C & +Da & +F \\ & +E & \end{array}\right\}=0....(a)$$

On doit avoir à-la-fois les trois équations de condition

$$\begin{gathered} Aa^2+Ba+C=0, \\ 2Aab+Bb+Da+E=0, \\ Ab^2+Db+F=0, \end{gathered}$$

qui peuvent facilement se mettre sous la forme

$$(2Aa+B)^2=G,\quad (2Aa+B)(2Ab+D)=H,\quad (2Ab+D)^2=K;$$

la première prouve que G doit être positif ou zéro, la troisième prouve la même chose pour K. D'ailleurs on tire sur-le-champ de ces trois équations

$$H^2=GK,\quad \text{ou}\quad 4A\Delta=0.$$

Ainsi, comme nous ne supposons pas ici que A puisse être zéro, on aura $\Delta=0$.

Donc, quand $G<0$, l'équation ne peut jamais appartenir à la ligne droite.

Quand $G=0$, on doit avoir $H=0$, et $K=0$ ou $K>0$.

Quand $G>0$, on doit avoir $\Delta=0$, condition dans laquelle la condition $K>0$ est comprise.

Or ces conditions étant précisément les mêmes que celles du n° précédent, on doit en conclure que, dans tout autre cas, l'équation (A) appartient à une ligne courbe.

34. Remarquons en passant que si nous n'eussions anéanti que le coefficient du premier terme de l'équation (a), nous aurions exprimé que la droite dont l'équation est

$$y=ax+b,$$

ne rencontre la ligne du second ordre qu'en un point, ou, si l'on veut, en un point situé à une distance finie, et en un autre situé à une distance infinie; car l'évanouissement du coefficient de x^2 ne réduit l'équation (a) au premier degré que dans l'hypothèse ou x n'est pas infinie : ce qui ne donne au reste dans tous les cas qu'une intersection effective. Comme l'équation $(2Aa+B)^2-G=0$ qui résulte de cette supposition, exige que G ne soit pas négatif, et qu'elle suffit d'ailleurs pour déterminer a, il s'ensuit que dans les deux cas de $G=0$ et $G>0$, c'est-à-dire pour la *parabole* et l'*hyperbole*, il existe une infinité de droites qui ne rencontrent la courbe qu'en un point, et que ces droites sont parallèles entre elles. En outre, la valeur de a est double quand $G>0$, et elle cesse de l'être

quand $G=0$; ainsi, pour l'hyperbole, les droites dont il est question se distribuent en deux systèmes tels que toutes celles de l'un des systèmes sont parallèles entre elles, et concourantes avec celles de l'autre système; pour la *parabole*, ces droites ne forment plus qu'un seul et même système. La tangente de l'angle qu'elles font avec l'axe des abscisses, est

$$a=\frac{-B\pm\sqrt{G}}{2A}.$$

Si l'on anéantit encore le coefficient de x, b se trouve déterminé, et la droite ne rencontre la courbe qu'à l'infini. L'équation

$$(2Aa+B)(2Ab+D)-H=0$$

qui résulte de cette supposition, devient, à cause de.....

$$2Aa+B=\pm\sqrt{G},$$

$$2Ab+D=\pm\frac{H}{\sqrt{G}}:$$

elle exige que G soit >0, car s'il était $=0$, la valeur de b deviendrait infinie, à moins qu'on n'eût en même temps $H=0$, cas auquel l'équation générale appartient à la ligne droite. Cette circonstance ne peut donc avoir lieu que pour l'*hyperbole;* il y a deux droites qui jouissent de cette propriété, et elles font évidemment partie des deux systèmes dont nous venons de reconnaître l'existence : on les nomme *asymptotes*.

Si l'on divise l'équation (C) par $(Gx+H)^2$, elle peut se mettre sous la forme

$$G\left(\frac{2Ay+Bx+D}{Gx+H}\right)^2-1+\frac{4A\Delta}{(Gx+H)^2}=0:$$

or plus la valeur de x sera grande, plus la fraction $\frac{4A\Delta}{(Gx+H)^2}$ diminnera; ainsi, en prenant x plus grande qu'aucune quantité donnée, l'équation se réduit à

$$G\left(\frac{2Ay+Bx+D}{Gx+H}\right)^2=1,$$

ou à

$$2Ay + Bx + D = \mp (Gx + H)\frac{1}{\sqrt{G}},$$

qui donne

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{G}}{2A}x - \frac{D\sqrt{G} \mp H}{2A\sqrt{G}},$$

équation du système de deux droites qui sont évidemment les mêmes que les asymptotes. Ainsi les asymptotes approchent d'autant plus de se confondre avec la courbe, que l'abscisse est plus grande. Il résulte aussi de là, comme on voit, un moyen très-simple de déduire directement l'équation des asymptotes de l'équation de la courbe.

35. Nous avons découvert que dans chacun des trois genres de courbes, il existait une droite qui coupe en deux parties égales toutes les cordes menées parallèlement à l'axe des ordonnées, et que nous avons nommée *diamètre*: il est facile de se convaincre qu'il existe une infinité de diamètres différens. Car si l'on imagine qu'à l'aide de la transformation des axes, on change la direction de l'axe des ordonnées, sans changer celle de l'axe des abscisses, on aura une nouvelle équation de la forme

$$A'u^2 + B'ut + C't^2 + D'u + E't + F' = 0,$$

qui conduira à un diamètre dont l'équation serait

$$u = -\frac{B't + D'}{2A'}:$$

ce diamètre coupant en deux parties égales toutes les cordes parallèles au nouvel axe des ordonnées, une considération géométrique fort simple prouve qu'il ne peut se confondre avec le premier diamètre, à moins que l'équation n'appartienne au système de deux droites parallèles. Ainsi, comme l'inclinaison de l'axe des u est arbitraire, on peut donc concevoir une infinité de diamètres. Au reste, le calcul conduit de lui-même à ce résultat; car si l'on rapporte le nouveau diamètre aux axes primitifs, on voit, par la comparaison des deux équa-

tions, qu'elles ne peuvent être identiques, sans qu'on ait $G = 0$ et $H = 0$. On trouve en même temps que ces diamètres se coupent tous en un même point, excepté dans la parabole où ils sont parallèles entre eux, et coïncident avec le système de droites qui (n° précéd.) ne rencontrent la courbe qu'en un point. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet que nous traiterons avec détail dans le § suivant.

36. Il est évident que nous aurions pu préparer l'équation (A) par rapport à x comme nous l'avons préparée par rapport à y. D'ailleurs l'inspection des valeurs de G et de Δ fait voir qu'elles ne changent point, quand on y substitue C, A, E, D au lieu de A, C, D, E respectivement; ainsi, tout ce qui a été dit (n° 31) s'appliquera exactement de la même manière, ce qui prévient l'objection que pourrait faire naître l'hypothèse $A = 0$, car tout se comportera comme si dans l'analyse du n° 31, on avait supposé $C = 0$, pourvu que l'on dise, par rapport à l'axe des ordonnées, ce que l'on aurait dit par rapport à l'axe des abscisses. Or l'hypothèse $C = 0$ n'introduit aucun changement dans tout ce qui a été dit; on voit seulement qu'alors G est nécessairement positif, si B n'est pas égal à zéro ; donc la courbe est une parabole ou une hyperbole, suivant que B est ou n'est pas $= 0$. Quant aux systèmes de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un point (n° 34), comme on a $\sqrt{G} = B$, la valeur de a devient $a = \frac{-B \pm B}{2A}$ qui donne 0 pour l'une des valeurs et $-\frac{B}{A}$ pour l'autre : donc les droites de l'un de ces systèmes, et partant l'une des asymptotes, sont parallèles à l'axe des abscisses; au reste l'équation (A) le fait voir par elle-même, puisque le terme x^2 manquant, quelle que soit la valeur que l'on attribue à y, il n'en résulte qu'une seule valeur pour x.

Ainsi, dans le cas où $A = 0$, la courbe est de même du second ou du troisième genre, les droites parallèles à l'axe des ordonnées ne la rencontrent qu'en un point, et l'une des asymptotes est parallèle à l'axe des ordonnées.

Mais si l'on a en même tems $A=0$ et $C=0$ la préparation du n° 31 ne peut plus avoir lieu, et l'équation devient

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0 :$$

or par ce qui précède (n° 34) on sait que dans l'hyperbole, il existe deux systèmes de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un point. Donc, si l'on prenait pour axes une droite de chaque système, l'équation de la courbe rapportée à ces axes serait nécessairement de la forme précédente, puisqu'elle ne peut renfermer les quarrés des coordonnées; d'où l'on peut conclure que dans le cas où $A=C=0$, l'équation appartient encore à une hyperbole : on pourrait même, en prenant pour axes les deux droitesqui ne rencontrent la courbe qu'à l'infini, ramener l'équation à la forme

$$Mut = N.$$

Au reste, la discussion de l'équation

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0,$$

prouve évidemment qu'elle appartient à l'hyperbole. On en tire en effet

$$y = -\frac{Ex+F}{Bx+D} = -\frac{E}{B} - \frac{BF-ED}{B(Bx+D)}.$$

Ainsi, la valeur de y est composée de deux parties dont l'une est constante et l'autre fonction de x. En s'arrêtant à la première partie, on aurait $y = -\frac{E}{B}$ équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses ; et pour achever ensuite de construire la valeur de y, il faut augmenter l'ordonnée de la droite de la partie fractionnaire variable, ou la diminuer, suivant que cette fraction sera de même signe que l'autre, ou de signe différent. Nous ne nous arrêterons qu'au premier cas, et nous supposerons même que B et D soient de même signe. Il serait également facile d'appliquer à toute autre hypothèse les raisonnemens que nous allons faire.

Si l'on prend une valeur positive pour x, à mesure que

cette valeur augmente, la fraction $\frac{BF-ED}{B(Bx+D)}$ diminue ; la courbe approche continuellement de la droite dont l'équation est $y=-\frac{E}{B}$, sans cependant pouvoir jamais l'atteindre, puisqu'il faudrait que x fût infini. Si l'on prend pour x une valeur négative, tant que Bx est $<D$, la fraction conserve le même signe que pour les abscisses positives, et va continuellement en augmentant, puisque le dénominateur diminue. Quand on a $Bx+D=0$, ou $x=-\frac{D}{B}$, la fraction devient infinie ; donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées, et dont l'équation est $Bx+D=0$, ne rencontre la courbe qu'à l'infini. Ainsi, il y a une partie de la courbe renfermée dans l'un des angles que forment ces deux droites parallèles l'une à l'axe des abscisses, l'autre à l'axe des ordonnées. Si l'on continue d'augmenter la valeur de x négativement, la fraction changera de signe, et diminuera d'autant plus que la valeur de x deviendra plus grande ; ainsi la courbe se rapproche encore continuellement de l'axe des abscisses, sans pouvoir jamais la rencontrer, puisqu'il faudrait attribuer à x une valeur infinie. Donc il y a une seconde partie de la courbe comprise dans l'angle opposé au premier. Donc enfin la courbe à laquelle appartient l'équation, dans le cas où $A=C=0$, s'étend indéfiniment dans tous les sens, et est composée de deux parties séparées : ainsi elle se rapporte au troisième genre. D'ailleurs comme G se réduit alors à B^2, on voit que ce cas particulier est compris dans le caractère $G>0$.

37. Avant de quitter ce sujet, nous ferons remarquer que tout ce qui précède peut être regardé comme indépendant de l'inclinaison des axes, pourvu que l'on fasse dans ce § les changemens relatifs à la ligne droite rapportée à des axes obliques, ce qui se réduit à ne pas regarder le coefficient a de l'équation $y=ax+b$ comme une tangente, et n'influe en rien sur le fond de la théorie.

§ II.

Réduction de l'équation générale des courbes du second ordre aux formes les plus simples par la transformation des axes.

38. Reprenons l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \ldots (A)$$

où les axes sont supposés rectangulaires entre eux, et rapportons la courbe à laquelle elle appartient à des axes dont l'origine et l'inclinaison soient indéterminées. ais comme il est indifférent d'opérer en même temps les deux changemens, ou de les faire successivement, transportons d'abord l'origine, et ensuite nous changerons la direction des axes.

Nous ferons donc dans l'équation (*A*)

$$x = x' + p, \quad y = y' + q;$$

elle deviendra

$$\left.\begin{array}{llll} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + 2Aq & y' + 2Cp & x' + Aq^2 & \\ \quad + Bp & \quad + Bq & \quad + Bpq & \\ \quad + D & \quad + E & \quad + Cp^2 & \\ & & \quad + Dq & \\ & & \quad + Ep & \\ & & \quad + F & \end{array}\right\} = 0,$$

qui, en posant

$$2Aq + Bp + D = 0 \ldots (1), \qquad 2Cp + Bq + E = 0 \ldots (2),$$

se réduit à

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Aq^2 + Bpq + Cp^2 + Dq + Ep + F = 0.$$

Les équations (1) et (2) donnent par l'élimination

$$p = -\frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC} = -\frac{H}{G},$$

$$q = -\frac{BE - 2CD}{B^2 - 4AC} = -\frac{BE - 2CD}{G};$$

donc si $G=0$, ces valeurs deviennent infinies, et alors il est impossible de faire disparaître les termes affectés de la première puissance des coordonnées.

p et q étant déterminés, on pourrait substituer leurs valeurs dans le dernier terme de l'équation, pour l'obtenir exprimé en fonction des coefficiens de l'équation (A); mais on peut y parvenir plus simplement. Il est évident que ce dernier terme, n'étant autre chose que l'équation (A), dans laquelle on a remplacé x et y par p et q, pourra être mis, par une transformation analogue à celle du n° 31, sous la forme

$$\frac{1}{4AG}\left\{G(2Aq+Bp+D)^2-(Gp+H)^2+4A\Delta\right\}.$$

Or on a $p=-\frac{H}{G}$, ou $Gp+H=0$, et en vertu de l'équation (1), cette expression se réduit sur-le-champ à $\frac{\Delta}{G}$. Ainsi l'équation en x', y' devient

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+\frac{\Delta}{G}=0\ldots\ldots\ (B')$$

39. Changeons maintenant la direction des axes; en faisant dans l'équation (B')

$$x'=t\cos\alpha+u\cos\beta,$$
$$y'=t\sin\alpha+u\sin\beta,$$

elle devient

$$\begin{array}{lll} A\sin^2\beta & u^2+2A\sin\alpha\sin\beta & tu+A\sin^2\alpha\ t^2+\frac{\Delta}{G}=0;\ldots(b)\\ +B\sin\beta\cos\beta & +B\sin\alpha\cos\beta & +B\sin\alpha\cos\alpha\\ +C\cos^2\beta & +B\sin\beta\cos\alpha & +C\cos^2\alpha\\ & +2C\cos\alpha\cos\beta & \end{array}$$

et si l'on pose l'équation de condition

$$2A\sin\alpha\sin\beta+B(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)+2C\cos\alpha\cos\beta=0\ldots(3),$$

et que l'on fasse pour abréger

$$A\sin^2\beta + B\sin\beta\cos\beta + C\cos^2\beta = P,$$
$$A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha = Q,$$

on réduit l'équation (B') à la forme très-simple

$$Pu^2 + Qt^2 + \frac{\Delta}{G} = 0 \ldots\ldots\ldots (C')$$

L'équation (3) ne détermine pas les angles α et β, et l'un d'eux reste absolument arbitraire, car il est possible de la mettre sous la forme

$$2A\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta + B(\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta) + 2C = 0,$$

en divisant $\cos\alpha\cos\beta$; et cette équation donne toujours une valeur réelle pour tang β, quelle que soit celle que l'on attribue à α.

40. Soit que l'on résolve l'équation (C') par rapport à u, soit qu'on la résolve par rapport à t, elle donne des valeurs égales et de signes contraires; ainsi chaque axe est un *diamètre* (n° 31), et coupe en deux parties égales les cordes menées parallèlement à l'autre. Lorsque deux diamètres sont tels que les cordes coupées en deux parties égales par l'un d'eux sont parallèles à l'autre, on les nomme *diamètres conjugués*. Ainsi, puisqu'il y a une infinité de systèmes d'axes qui peuvent conduire à une équation de la forme (C'), il y a donc une infinité de systèmes de diamètres conjugués. Tous ces systèmes ont même origine, puisque (n° 38) les coordonnées p et q sont entièrement déterminées; cette origine commune s'appelle *centre*. D'ailleurs l'angle α étant arbitraire, il est clair que si l'on donne une droite quelconque qui passe par le centre, en faisant avec l'axe des x' un angle α, on pourra toujours, au moyen de l'équation (3), en déterminer une autre qui fasse un angle β, et qui passe par le même point; ces deux droites formeront un système d'axes qui conduirait à l'équation (C'),

et partant chacune d'elle est diamètre, et diamètre conjugué de l'autre; donc : *toute droite qui passe par le centre est un diamètre, et fait partie d'un système de diamètres conjugues.*

Or les diamètres conjugués se coupent mutuellement en deux parties égales au centre; donc : *toute droite qui passe par le centre, y est coupée en deux parties égales.*

Réciproquement, *tout diamètre doit passer par le centre;* car parmi les cordes parallèles que ce diamètre, quel qu'il soit, coupe en deux parties égales, il y en a une qui passe par le centre, et dont ce point est le milieu.

Si l'on imagine deux cordes parallèles, on peut toujours mener par le centre, un diamètre qui leur soit parallèle; or le diamètre qui lui sera conjugué devra couper les deux cordes en deux parties égales, et partant, il se confondra avec la droite qui joint le milieu de ces deux cordes. Donc : *toute droite qui passe par le milieu de deux cordes parallèles, est un diamètre, et passe par consequent par le milieu de toutes les cordes parallèles.*

On prouvera de même que *toute droite qui joint le centre et le milieu d'une corde, est un diamètre et coupe en deux parties égales toutes les cordes parallèles.*

41. Puisque α et β sont indéterminés, P et Q le sont aussi; mais au lieu de regarder l'un des angles α, β comme indépendant, on peut prendre l'angle $\beta - \alpha$ que font les deux axes entre eux, et que nous désignerons par ψ; on aura $\beta = \psi + \alpha$. Si l on substitue dans l'équation (3), elle devient

$$\begin{array}{llll} 2A\sin\alpha\cos\alpha & \sin\psi + 2A\sin^2\alpha & \cos\psi = 0 \ldots . & (4) \\ + B\cos^2\alpha & + 2B\sin\alpha\cos\alpha & & \\ - B\sin^2\alpha & + 2C\cos^2\alpha & & \\ - 2C\sin\alpha\cos\alpha & & & \end{array}$$

on, en divisant par $\cos^2\alpha\cos\psi$, et ordonnant:

$$(2A - B\tan\psi)\tan^2\alpha + 2(B + \overline{A - C}.\tan\psi)\tan\alpha + 2C + B\tan\psi = 0.$$

Cette équation donne pour tang α

$$\text{tang}\alpha = -\frac{B+(A-C)\text{tang}\varphi}{2A-B\,\text{tang}\varphi} \pm \frac{\sqrt{\{G+(B^2+\overline{A-C}^2)\text{tang}^2\varphi\}}}{2A-B\,\text{tang}\varphi};$$

on voit par là que lorsque G est négatif, l'angle φ n'est pas absolument arbitraire, puisqu'il faut qu'on ait

$$\text{tang}^2\varphi > \frac{-G}{B^2+\overline{A-C}^2};$$

de sorte que la limite de la valeur de tang φ est

$$\text{tang}\,\varphi = \pm\frac{\sqrt{-G}}{\sqrt{(B^2+\overline{A-C}^2)}}.$$

Mais lorsque G est positif, l'angle φ est entièrement arbitraire.

Quand l'angle φ est droit, l'équation (4) divisée par $\cos^2\alpha$, se réduit à

$$B\,\text{tang}^2\alpha - 2(A-C)\,\text{tang}\,\alpha - B = 0,$$

qui donne des valeurs réelles, puisque le dernier terme est négatif; ainsi, parmi les systèmes de diamètres conjugués, il y en a un dans lequel les diamètres se coupent à angle droit.

Comme cette équation a deux racines, on pourrait croire que chacune d'elles donne un système différent, et que par conséquent celui où les diamètres sont rectangulaires n'est pas unique; mais on doit remarquer que le dernier terme de l'équation est $\frac{-B}{B} = -1$; ainsi, si l'on nomme α, α' les angles auxquels appartiennent les deux racines, on a tang α tang $\alpha' = -1$, les deux diamètres qui font avec l'axe les angles α, α' sont perpendiculaires entre eux (n° 29), et partant les deux solutions se réduisent à une seule.

D'ailleurs comme on a $\alpha = \beta - \varphi$, on voit que l'on obtiendrait β par la formule précédente, en y changeant φ en

$-\psi$, c'est-à-dire, tang ψ en $-$ tang ψ. On pourrait ensuite calculer sin α, cos α, sin β, cos β; et substituant dans les valeurs de P et de Q, on aurait enfin ces derniers exprimés en fonction de l'angle ψ. Mais le calcul serait extrêmement pénible, et pour obvier à cet inconvénient, nous allons chercher des relations plus simples entre P, Q et l'angle ψ.

42. Les valeurs de P et de Q, multipliées par $4A$, peuvent se mettre sous la forme

$$4AP = (2A \sin\beta + B\cos\beta)^2 - G\cos^2\beta,$$
$$4AQ = (2A \sin\alpha + B\cos\alpha)^2 - G\cos^2\alpha;$$

et l'équation (3), en la multipliant par $2A$, sous la suivante,

$$(2A\sin\alpha + B\cos\alpha)(2A\sin\beta + B\cos\beta) - G\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

En éliminant $2A\sin\beta + B\cos\beta$ et $2A\sin\alpha + B\cos\alpha$ entre ces trois équations, on trouve, réduction faite,

$$4APQ + G(P\cos^2\alpha + Q\cos^2\beta) = 0.$$

On obtiendrait de même, en multipliant par $4C$ les valeurs de P et de Q, l'équation (3) par $2C$, et conduisant le calcul de la même manière, ou, changeant A en C, les cosinus en sinus, et réciproquement,

$$4CPQ + G(P\sin^2\alpha + Q\sin^2\beta) = 0.$$

Or si l'on développe les quantités qui multiplient G dans ces équations, en y substituant les valeurs de P et Q, on trouve facilement, au moyen de l'équation (3),

$$P\cos^2\alpha + Q\cos^2\beta = A\sin^2\psi,$$
$$P\sin^2\alpha + Q\sin^2\beta = C\sin^2\psi,$$

et partant

$$P + Q = (A + C)\sin^2\psi, \qquad 4PQ = -G\sin^4\psi,$$

Digitized by Google

d'où l'on tirera les valeurs de P et de Q par une équation du second degré.

Il suit de la relation $4PQ = -G\sin^2\varphi$, que PQ est toujours de signe contraire à G, c'est-à-dire que P et Q sont de même signe ou de signe différent, suivant que G est négatif ou positif. Quand $G\,(=B^2-4AC)$ est négatif, A et C sont nécessairement de même signe, et par conséquent on peut les supposer tous les deux positifs; mais il suit de la relation $P+Q=(A+C)\sin^2\varphi$, que $P+Q$ est de même signe que $A+C$, et comme P et Q ont tous deux même signe, il s'ensuit qu'ils sont positifs l'un et l'autre.

Si l'angle φ est droit, les relations précédentes deviennent

$$4PQ=-G,\quad P+Q=A+C.$$

43. Comme le cas de $G=0$ a été exclus dans les n^os^ précédens, nous allons essayer maintenant une transformation qui puisse avoir lieu pour les trois genres.

Si l'on fait directement dans l'équation (A),

$$x=t\cos\alpha+u\cos\beta,$$
$$y=t\sin\alpha+u\sin\beta,$$

et que l'on anéantisse, comme au n° 39, le coefficient de tu, on aura la même équation de condition; les coefficiens de u^2 et t^2 seront encore P et Q, et l'équation deviendra

$$Pu^2+Qt^2+D'u+E't+F=0\ldots\ldots(B')$$

en faisant pour abréger

$$B\sin\beta+E\cos\beta=D',\quad D\sin\alpha+E\cos\alpha=E'.$$

Puisque la transformation actuelle donne entre α et β la même équation de condition que celle du n° 39, il s'ensuit évidemment que les axes des t, u sont parallèles à un système de diamètres conjugués, du moins lorsqu'il existe de tels diamètres, c'est-à-dire, lorsque l'on n'a pas $G=0$.

44. Si, changeant ensuite l'origine, on fait

$$t = t' + p, \quad u = u' + q,$$

l'équation (B'') se change en

$$\left.\begin{array}{llll} Pu'^2 + Qt'^2 + 2Pq\,u' + 2Qp\,t' + Pq^2 \\ \qquad\quad + D' \quad\; + E' \quad\; + Qp^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + D'q \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + E'p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + F \end{array}\right\} = 0 \ldots (b')$$

En anéantissant les termes u', t', au moyen des hypothèses

$$2Pq + D' = 0, \quad 2Qp + E' = 0,$$

on retrouverait nécessairement l'équation (C') du n° 39. Or, quand G n'est pas $= 0$, le dernier terme peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{4PQ}\{Q(2Pq + D')^2 + P(2Qp + E')^2\} + F - \frac{QD'^2 + PE'^2}{4PQ},$$

et partant, à cause des hypothèses ci-dessus, se réduit à

$$F - \frac{QD'^2 + PE'^2}{4PQ};$$

et comme l'équation que l'on obtiendrait doit être identique avec l'équation (C'), on a nécessairement

$$F - \frac{QD'^2 + PE'^2}{4PQ} = \frac{\Delta}{G}.$$

45. Mais on sait que dans le cas de $G = 0$, l'équation (A) ne peut être ramenée à la forme de l'équation (C'); et d'ailleurs cette exception se présente de nouveau ici, puisque l'on a $4PQ = 0$, et que par conséquent $P = 0$ ou $Q = 0$, ce qui rendrait infinie la valeur de q ou celle de p. Ainsi, ne pou-

vant obtenir, dans tous les cas, une équation qui ne renferme plus les termes u', t', nous n'en anéantirons qu'un seul et le dernier terme au moyen des équations

$$2Pq + D' = 0 \ldots\ldots\ldots (5),$$
$$Pq^2 + Qp^2 + D'q + E'p + F = 0 \ldots (6);$$

ce qui réduit l'équation (B'') à

$$Pu'^2 + Qt'^2 + R't' = 0 \ldots\ldots (C''),$$

en désignant par R ce que devient le coefficient $2Qp + E'$. Or l'équation (6), qui doit déterminer p quand on y aura substitué la valeur de q tirée de l'équation (5), étant du second degré, p peut être imaginaire, et partant la transformation impossible; c'est ce qu'il s'agit maintenant d'examiner.

46. L'équation (6) n'est autre chose que le polynome qui servait de dernier terme à l'équation (b') (n° 44); ainsi, quand G' n'est pas $= 0$, elle peut subir la même décomposition, et à l'aide de l'équation $2Pq + D' = 0$, qui a seule lieu ici, elle se réduit à

$$P(2Qp + E')^2 + 4PQ\left(F - \frac{QD'^2 + PE'^2}{4PQ}\right) = 0 :$$

or nous avons remarqué (n° 44) que toute la quantité qui multiplie $4PQ$ était égale à $\frac{\Delta}{G}$, on a donc

$$(2Qp + E')^2 + \frac{4Q\Delta}{G} = 0 ;$$

ou

$$2Qp + E' = R = \sqrt{-\frac{4Q\Delta}{G}} = \sqrt{\frac{\Delta}{P}}\sin\varphi,$$

expression qui ne sera réelle que si $\frac{\Delta}{P}$ est positif.

Cela posé, si $G < 0$, la transformation sera toujours pos-

sible, lorsque l'équation (A) le sera. En effet, nous avons vu (n° 32) qu'il fallait que Δ fût positif; d'ailleurs (n° 42), lorsque G est négatif, P et Q sont positifs; donc $\frac{\Delta}{P}$ est positif, et la valeur de p est toujours réelle.

Si $G > 0$, la transformation n'est pas toujours possible; car Δ pouvant être positif ou négatif, $\sqrt{\frac{\Delta}{P}}$ ne sera réel que dans le cas où P et Δ seraient de même signe; donc, dans le cas contraire, on ne pourrait faire disparaître le terme u'; mais comme P et Q sont de signes différens quand G est positif, il est aisé de voir que l'on pourra faire disparaître le terme t', et ramener l'équation (A) à la forme

$$Pu'^2 + Qt'^2 + Su' = 0.$$

47. Quand $G = 0$, la valeur donnée pour R au n° précéd. n'a plus lieu. On doit observer ici que la condition $4PQ = -G\sin^2\gamma$ donnant alors $P = 0$, ou $Q = 0$, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, on n'est pas libre d'anéantir à volonté le coefficient de u' ou celui de t'; d'abord parce que l'hypothèse $2Pq + D' = 0$ ferait disparaître entièrement u' de l'équation, si l'on avait $P = 0$, et ensuite parce que la valeur de q deviendrait infinie. Cherchons à distinguer dans quel cas P s'anéantit, et dans quel cas c'est au contraire Q qui deviendrait nul.

En mettant P, Q et l'équation de condition sous la même forme qu'au n° 42, l'hypothèse $G = 0$ les réduit à

$$4AP = (2A\sin\beta + B\cos\beta)^2,\quad 4AQ = (2A\sin\alpha + B\cos\alpha)^2,$$
$$(2A\sin\beta + B\cos\beta)\ (2A\sin\alpha + B\cos\alpha) = 0.$$

On peut donc satisfaire de deux manières à l'équation de condition, c'est-à-dire, en faisant

$$2A\sin\beta + B\cos\beta = 0,\ \text{ ou }\ 2A\sin\alpha + B\cos\alpha = 0.$$

Ces deux hypothèses ne peuvent avoir lieu que séparément;

car si on les faisait en même temps, il en resulterait tang α $=$ tang β, d'où $\alpha = \beta$, et les axes se confondraient. Or on voit que la première anéantit la valeur de P, et la seconde celle de Q, car nous ne supposons pas qu'on puisse avoir $A = 0$. D'ailleurs, quand $A = 0$, l'hypothèse $G = B^2 - 4AC = 0$ donne $B = 0$; les valeurs de P et Q et l'équation de condition se réduisent à

$$P = C\cos^2\beta, \quad Q = C\cos^2\alpha, \quad C\cos\alpha\cos\beta = 0,$$

qui donnent alors les mêmes conséquences.

Donc, suivant que l'on déterminera β ou α, P ou Q disparaîtront; ainsi, dans la première hypothèse, on ne pourra pas faire disparaître le terme en u'.

Supposons donc qu'on ait fait $2A\sin\alpha + B\cos\alpha = 0$, on en tire $\text{tang}\,\alpha = -\dfrac{B}{2A}$; et comme on a alors $Q = 0$, il en résulte $R = E' = D\sin\alpha + E\cos\alpha$. Mais, puisque..... $\text{tang}\,\alpha = -\dfrac{B}{2A}$, on aura

$$\sin\alpha = \mp\frac{B}{\sqrt{(4A^2+B^2)}}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{2A}{\sqrt{(4A^2+B^2)}};$$

et partant

$$R = \mp\frac{H}{\sqrt{(4A^2+B^2)}} = \mp\frac{H}{2\sqrt{(A+C)A}},$$

puisque $B^2 = 4AC$.

D'ailleurs l'équation $P + Q = (A + C)\sin^2\psi$ donne, dans le cas où $Q = 0$,

$$P = (A + C)\sin^2\psi.$$

Au reste, l'équation (6) ne renfermant plus le quarré de p, la valeur de cette quantité sera toujours réelle.

48. L'équation (C'')

$$Pu^2 + Qt^2 + Rt = 0,$$

où nous supprimons les accens pour plus de simplicité, ren-

ferme donc toutes les lignes auxquelles peut appartenir l'équation générale. Elle donne les courbes du premier genre quand P et Q sont de meme signe ; celles du second, quand $Q=0$; celles du troisième, quand P et Q sont de signes contraires.

La forme de cette équation fait voir que l'axe des abscisses est un diamètre, puisque les ordonnées correspondantes à la même abscisse sont égales et de signes contraires. Quand on fait $t=0$, on a $u^2=0$; ainsi les deux ordonnées correspondantes à l'origine deviennent égales et nulles toutes deux ; donc l'ordonnée qui passe par l'origine, ou plutot l'axe des ordonnées, n'a qu'un point commun avec la courbe, c'est-à-dire, qu'il est *tangent* à cette courbe.

Cela posé, dans le cas où G n'est pas $=0$, ou, pour les courbes qui ont un centre et des diamètres conjugués, les axes sont parallèles à un système de diamètres conjugués ; donc l'axe des t étant lui-même un diamètre, l'axe des u sera parallèle à son conjugué ; donc : *si par l'extremite d'un diamètre on mène une droite parallèle à son conjugué, cette droite sera tangente à la courbe*

Réciproquement, *si une droite est tangente à la courbe, elle sera parallèle au diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point de contact*. En effet, si l'on imagine un diamètre parallèle à la tangente, son conjugué passera par le milieu de toutes les cordes parallèles à la tangente, et partant, par le point de contact lui-même, pour lequel la corde est nulle.

Dans le cas où $G=0$, il n'y a plus ni centre ni diamètres conjugués ; mais ce genre de courbes jouit, par rapport à ses diamètres, d'une propriété remarquable. Nous venons de voir que l'hypothèse $G=0$, rend l'équation (3) décomposable en deux facteurs dont un seul peut être égalé à zéro. Il en résulte que l'angle α est déterminé, et l'angle β indéterminé, pour l'équation

$$Pu^2+Rt=0\,;$$

donc les axes des t, c'est-à-dire, *tous les diamètres sont parallèles entre eux*, quoique l'indétermination de β fasse voir

d'un autre côté, qu'il y a, comme dans les autres genres, une infinité de systèmes qui conduisent à une équation de la forme $Pu^2 + Rt = 0$. On peut même remarquer que tang α étant $= -\frac{B}{2A}$, ces diamètres ne sont autre chose que le système de droites parallèles qui ne rencontrent la courbe qu'en un point (n° 34). Quant à l'axe des u, il est tangent, ainsi que nous l'avons reconnu en général, d'après la forme de l'équation commune aux trois genres.

49. Si nous avions voulu disposer des indéterminées α, β, pour faire disparaître de l'équation (b) (n° 39) les termes affectés du quarré des coordonnées, nous aurions obtenu, au lieu de l'équation (3), les deux équations de condition

$$A \sin^2\beta + B \sin\beta \cos\beta + C \cos^2\beta = 0,$$
$$A \sin^2\alpha + B \sin\alpha \cos\alpha + C \cos^2\alpha = 0,$$

qui, divisées par $\cos^2\beta$, $\cos^2\alpha$ respectivement, deviennent

$$A \tang^2\beta + B \tang^2\beta + C = 0, \quad A \tang^2\alpha + B \tang\alpha + C = 0.$$

Quoique ces équations soient identiques, il est impossible, par la raison que nous avons déjà donnée en pareille occasion, de prendre tang α = tang β; mais tang α et tang β sont racines d'une même équation. Or on trouve

$$\tang\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{G}}{2A};$$

donc

$$\tang\beta = \frac{-B \mp \sqrt{G}}{2A}.$$

Il suit de là que cette transformation n'est possible qu'autant que G est positif; car si G est négatif, les valeurs précedentes deviennent imaginaires; si $G = 0$, elles deviennent égales, ce qui est impossible.

Si nous désignons par M ce que devient le coefficient de tu,

l'équation se trouve réduite à

$$Mtu + \frac{\Delta}{G} = 0,$$

et l'on a

$$M = 2A\sin\alpha\sin\beta + B(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) + 2C\cos\alpha\cos\beta$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}(2A\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta + B(\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta) + 2C.$$

Tang α et tang β étant racines d'une même équation, on a

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta = \frac{C}{A},\quad \text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta = -\frac{B}{A},$$

d'où

$$M = \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} \times \frac{4AC - B^2}{A} = -\frac{G}{A}\cos\alpha\cos\beta;$$

mais on déduit facilement des valeurs précédentes de tang α, tang β,

$$\cos\alpha = \frac{\pm 2A}{\sqrt{\{4A^2 + (B \mp \sqrt{G})^2\}}},$$

$$\cos\beta = \frac{\pm 2A}{\sqrt{\{4A^2 + (B \pm \sqrt{G})^2\}}}.$$

Substituant, effectuant et réduisant, on trouve

$$M = \frac{\mp G}{\sqrt{(B^2 + \overline{A - C^2})}},$$

et par conséquent

$$ut = \pm \frac{\Delta\sqrt{(B^2 + \overline{A - C^2})}}{G^2},$$

équation des courbes du troisième genre rapportées aux *asymptotes* (n°s 34 et 36).

50. Il résulte de ce que nous avons exposé dans ce §, que,

des trois genres de courbes du second ordre, deux jonissent de la propriété commune d'avoir un centre et des diamètres conjugués, ce sont les genres qui résultent des hypothèses $G<0$ et $G>0$; d'ailleurs ces deux genres de courbes ont une équation qui leur est commune, et qui ne peut appartenir au troisième. Il semble, d'après cela, assez naturel de les diviser en deux classes, dont la première renferme *les courbes qui ont un centre*, c'est-à-dire les *ellipses* et les *hyperboles;* et la seconde *celles qui n'ont pas de centre*, c'est-à-dire le genre des *paraboles*.

CHAPITRE III.

De la nature et des propriétés particulières des trois genres de Courbes du second ordre.

PARAGRAPHE PREMIER.

Des Courbes qui ont un centre.

51. Les courbes qui ont un centre sont données par l'équation

$$Pu^2 + Qt^2 + \frac{\Delta}{G} = 0,$$

quelle que soit l'inclinaison des axes. Les quantités P et Q sont déterminées en fonction de cet angle et des coefficiens de l'équation générale, par les relations

$$4PQ = -G\sin^2\psi, \quad P + Q = (A + C)\sin^2\psi.$$

La position des axes des t, u, relativement aux axes primitifs, est déterminée par l'équation

$$2A\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta + B(\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta) + 2C = 0,$$

en observant que l'on a d'ailleurs $\psi = \beta - \alpha$.

Digitized by Google

Du genre des Ellipses.

52. Pour le genre des ellipses, on a $G<0$, $\Delta>0$; ainsi $\frac{\Delta}{G}$ est négatif : représentons-le par $-S$, l'équation deviendra

$$Pu^2+Qt^2=S.$$

Quoique nous ayons déjà reconnu la forme de la courbe au commencement du chapitre précédent, il ne sera pas inutile d'examiner de nouveau comment elle résulte de cette équation beaucoup plus simple que l'équation générale, d'autant plus que nous pourrons appercevoir ici des circonstances particulières qu'il aurait été difficile de distinguer par la méthode qui nous a servi alors.

Cette équation donne

$$u=\pm\sqrt{\frac{S-Qt^2}{P}}.$$

Si l'on suppose $t=0$, on trouve pour les ordonnées des points C, C' (fig. 14) où la courbe rencontre l'axe des ordonnées

$$u=\pm\sqrt{\frac{S}{P}};$$

si l'on fait $t>0$, la valeur de l'ordonnée diminue de plus en plus, à mesure que l'abscisse augmente, ensorte que lorsqu'on a

$$t=\sqrt{\frac{S}{Q}},$$

l'équation donne $u^2=0$; partant à ce point, l'ordonnée est nulle; elle est imaginaire pour toute valeur de t plus grande que $\sqrt{\frac{S}{Q}}$; et comme la même chose a lieu du côté des abscisses négatives, et qu'à chaque point de l'axe des abscisses compris entre B et B', répondent deux ordonnées égales et de

signe contraire. Il suit de là que la courbe est composée de deux branches situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des abscisses; que ces branches se réunissent aux points B, B' du même axe pour lesquels l'abscisse est..... $+\sqrt{\frac{S}{Q}}$ et $-\sqrt{\frac{S}{Q}}$; que si par ces points on mène les droites bBb', $b''B'b'''$ parallèles à l'axe des ordonnées, elle n'auront qu'un point commun avec la courbe, lui seront par conséquent tangentes, et limiteront son étendue dans le sens de l'axe des abscisses. On prouverait de la même manière que les droites menées parallèlement à l'axe des abscisses, par les points C, C', sont tangentes à la courbe, et limitent son étendue dans le sens de l'axe des ordonnées. Donc enfin la courbe est rentrante et fermée, et elle est inscrite au parallélogramme $bb''b'''b'$ dont les côtés sont $2\sqrt{\frac{S}{P}}$, $2\sqrt{\frac{S}{Q}}$.

53. Comme les coordonnées qui correspondent à des abscisses égales sont égales elles-mêmes et réciproquement, il s'ensuit que si l'on prend $AP = AP'$, les cordes MPM', $M''P'M''$ sont égales et parallèles : donc la figure $MM''M'''M'$ est un parallélogramme ; et comme le centre de l'ellipse est le centre de figure du parallélogramme, les diagonales MM''', $M'M''$ passeront par le centre, et seront par conséquent des diamètres. D'où il est facile de conclure que :

Si par un même point de l'ellipse on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, la droite qui joindra les extrémités de ces cordes sera un diamètre.

Réciproquement :

Si par les extrémités d'un diamètre, on mène deux cordes à un même point de l'ellipse, les droites menées par le centre parallèlement à ces cordes, sont des diamètres conjugués.

En effet, concevons un diamètre parallèle à l'une des cordes, et que son conjugué ne soit pas parallèle à l'autre, en menant

par le point une corde parallèle à ce conjugué, les extrémités de cette corde et de la première déterminent un diamètre : mais comme il a deux points communs avec le diamètre supposé, il se confond donc avec lui.

54. Les lignes $\sqrt{\frac{S}{P}}$, $\sqrt{\frac{S}{Q}}$ sont les moitiés des diamètres conjugués ; représentons-les par n et m respectivement, on aura

$$\frac{S}{P} = n^2, \quad \frac{S}{Q} = m^2, \quad \text{ou} \quad P = \frac{S}{n^2}, \quad Q = \frac{S}{m^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe, elle devient, réduction faite,

$$m^2u^2 + n^2t^2 = m^2n^2.$$

Si on les substitue dans les relations

$$4PQ = -G\sin^2\Psi, \quad P + Q = (A + C)\sin^2\Psi,$$

elles deviennent

$$\frac{4S^2}{m^2n^2} = -G\sin^2\Psi, \quad \frac{S(m^2 + n^2)}{m^2n^2} = (A + C)\sin^2\Psi ;$$

ou

$$m^2n^2\sin^2\Psi = \frac{4S^2}{-G}, \quad m^2 + n^2 = \frac{A + C}{S}m^2n^2\sin^2\Psi,$$

ou encore

$$4mn\sin\Psi = \frac{8S}{\sqrt{-G}}, \quad 4m^2 + 4n^2 = -\frac{16S(A + C)}{G}.$$

Or $4mn\sin\Psi$ est l'aire du parallélogramme $bb''b'''b'$ formé sur les deux diamètres, $4m^2 + 4n^2$ est la somme des quarrés construits sur ces mêmes diamètres ; d'ailleurs les seconds membres de ces équations sont independans de l'angle Ψ ; il en résulte donc ces deux propriétés remarquables de l'ellipse :

1°. *L'aire du parallélogramme circonscrit à l'ellipse et formé sur deux diamètres conjugués, est constante, quelle que soit l'inclinaison de ces diamètres.*

2°. *La somme des quarrés construits sur deux diamètres conjugués de l'ellipse, est constante, quelle que soit aussi l'inclinaison de ces diamètres.*

55. Il est évident que l'on peut inscrire à l'ellipse une infinité de parallélogrammes, dont les côtés seraient respectivement parallèles à un système donné de diamètres conjugués, et l'on s'assurera sans peine que tout parallélogramme inscrit aura ses côtés parallèles à un système de diamètres conjugués. Ainsi l'équation de la courbe étant

$$m^2u^2 + n^2t^2 = m^2n^2,$$

les parallélogrammes inscrits, qui font le même angle que les diamètres, ont pour côtés $2t$, $2u$; de sorte que leur aire est exprimée par $4tu \sin \varphi$. Or on a

$$u = \frac{n}{m}\sqrt{(m^2 - t^2)};$$

partant

$$ut = \frac{n}{m}\sqrt{(m^2t^2 - t^4)}$$

$$= \frac{n}{m}\sqrt{\left\{\frac{m^4}{4} - \left(t^2 - \frac{m^2}{2}\right)\right\}}:$$

or pour le même angle φ, le parallélogramme sera le plus grand possible, lorsque ut aura la plus grande valeur, c'est-à-dire, lorsqu'on aura $t^2 = \frac{m^2}{2}$, ou $t = \frac{m}{\sqrt{2}}$, qui donne $u = \frac{n}{\sqrt{2}}$ et $ut = \frac{mn}{2}$. L'aire du plus grand parallélogramme inscrit, dont les côtés font entre eux un angle φ, est donc

$$2mn \sin \varphi,$$

ou la moitié de celle du parallélogramme circonscrit formé

sur les diamètres conjugués. En prenant un autre système dont l'angle soit ν', on trouvera de même que le plus grand parallélogramme inscrit, dont les côtés sont parallèles aux diamètres de ce système, est moitié du parallélogramme circonscrit; mais les aires des parallélogrammes circonscrits sont égales, donc aussi les aires des parallélogrammes inscrits *maxima* sont égales. Or il est aisé de voir que l'équation de la diagonale est $u = \frac{n}{m} t$, qui est aussi celle de la diagonale du parallélogramme circonscrit; donc les diagonales du parallélogramme circonscrit déterminent par leurs intersections avec la courbe les sommets du parallélogramme inscrit *maximum*.

56. Parmi tous les systèmes de diamètres conjugués, le plus remarquable est celui dans lequel les diamètres sont rectangulaires entre eux (n° 42). Nommons a et b les valeurs que prennent dans ce cas m et n, on a $\sin\nu = 1$, et partant (n° 54)

$$ab = \frac{2S}{\sqrt{-G}}, \quad a^2 + b^2 = -\frac{4S(A+C)}{G},$$

équations qui détermineront a et b.

Ces diamètres ont été nommés *axes principaux*. Il est aisé de voir qu'ils sont généralement inégaux, car en supposant $a = b$, les relations précédentes donnent

$$a^2 = \frac{2S}{\sqrt{-G}}, \quad a^2 = -\frac{2S(A+C)}{G},$$

et partant

$$(A+C)^2 + G = 0, \quad \text{ou} \quad \overline{A-C}^2 + B^2 = 0,$$

équation qui ne peut avoir lieu que lorsqu'on a

$$A = C, \quad \text{et} \quad B = 0,$$

cas auquel nous allons revenir. D'où il résulte que l'ellipse

n'a pas une courbure uniforme comme le cercle, mais qu'elle est alongée dans un sens. Nous supposerons dorénavant que a soit $> b$, et nous appellerons le diamètre $2a$, ou BB', *le grand axe*, et le diamètre $2b$, ou CC', *le petit axe* (fig. 15). Les points B, B', où le grand axe rencontre la courbe, se nomment *sommets*. Il est d'ailleurs évident que le grand axe et le petit axe coupent l'un et l'autre l'ellipse en deux parties égales.

L'équation de l'ellipse rapportée aux axes principaux, en comptant les abscisses sur le grand axe et les ordonnées sur le petit axe, est donc

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Dorénavant quand nous parlerons des *axes*, il faudra toujours entendre les *axes principaux*, ou les diamètres qui se coupent à angle droit; quand nous voudrons parler des lignes sur lesquelles on compte les abscisses et les ordonnées, nous dirons : *axes des coordonnées*.

57. Nous venons de voir que les deux axes sont égaux quand on a dans l'équation générale $A = C$, $B = 0$. L'équation précédente devient alors

$$y^2 + x^2 = a^2;$$

or $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ étant la distance d'un point de la courbe au centre, il s'ensuit que cette distance est la même pour tous les points, et comme cette propriété n'appartient qu'au cercle, l'équation

$$y^2 + x^2 = a^2$$

est donc celle d'un cercle dont le rayon est a, l'origine des coordonnées étant au centre.

On retombe encore sur cette propriété du cercle, en faisant $A = C$, $B = 0$ dans les relations qui donnent en général les diamètres conjugués, en fonction de l'angle qu'ils font entre eux, et des coefficiens de l'équation générale. En effet,

on trouve $G = -4A^2$, et partant

$$mn \sin \Psi = \frac{S}{A}, \quad m^2 + n^2 = \frac{2S}{A};$$

d'où

$$m^2 + n^2 - 2mn \sin \Psi = 0,$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$(m - n \sin \Psi)^2 + n^2 \cos^2 \Psi = 0,$$

et donne par conséquent

$$\cos \Psi = 0, \quad \text{d'où} \quad \sin \Psi = 1,$$

et

$$m = n \sin \Psi = n;$$

ou même $m = n = a$, puisque $\sin \Psi = 1$.

Donc : 1°. *tous les diamètres conjugués se coupent à angle droit.*

2°. *tous les diamètres sont égaux.*

La seconde partie de cette conclusion prouve évidemment que la courbe est un cercle; la première revient au théorème suivant, que l'on démontre en géométrie :

La perpendiculaire abaissée du centre sur une corde, coupe cette corde en deux parties égales, et réciproquement.

Cette proposition résulte encore de l'équation de condition en α et β, qui devenant

$$\text{tang}\,\alpha \,\text{tang}\,\beta + 1 = 0,$$

prouve que les diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux.

De ce qui précède et du n° 53, il suit que *les cordes qui joignent un point de la circonférence et les extrémités d'un diamètre, sont perpendiculaires entre elles*, ou que *l'angle qui a son sommet à la circonférence et qui s'appuie sur un diamètre, est un angle droit.*

Au reste on a dans ce cas $S=\frac{\Delta}{4A^2}$, $\Delta=A(D^2+E^2-4AF)$, d'où $S=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A}$, et partant

$$a=\sqrt{\frac{S}{A}}=\frac{\sqrt{(D^2+E^2-4AF)}}{2A}.$$

L'équation la plus générale du cercle, tant qu'on suppose les coordonnées rectangulaires, est donc

$$A(y^2+x^2)+Dy+Ex+F=0,$$

ou

$$y^2+x^2+\frac{D}{A}y+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\left(y+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(x+\frac{E}{2A}\right)^2+\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2};$$

or $-\frac{D}{2A}$, $-\frac{E}{2A}$ sont évidemment (n° 38) l'ordonnée et l'abscisse du centre; si on les représente par q et p, on aura

$$(y-q)^2+(x-p)^2=r^2, \text{ } r \text{ étant le rayon.}$$

C'est sous cette forme que l'on présente ordinairement l'équation la plus générale du cercle pour les coordonnées rectangulaires.

58. Dorénavant nous supposerons l'ellipse rapportée à ses axes.

L'équation

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

donne

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2):$$

Si l'on considère les coordonnées x', y' d'un autre point, on aura de même

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2);$$

donc

$$\frac{y^2}{y'^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2-x'^2}=\frac{(a+x)\,(a-x)}{(a+x')\,(a-x')};$$

or $a+x$ et $a-x$ sont les segmens du grand axe qui correspondent à l'ordonnée y' ; ainsi il résulte de là cette proposition :

Dans l'ellipse, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des segmens correspondans du grand axe.

Comme l'équation donne aussi

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2),$$

la même proposition a lieu évidemment, en changeant les expressions d'*ordonnées* et de *grand axe* en celles d'*abscisses* et de *petit axe*.

En observant qu'on a

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

nous aurions pu énoncer comme il suit la proposition précédente :

Le rapport du quarré de l'ordonnée au produit des segmens correspondans est constant, et égal au rapport du quarré du petit axe au quarré du grand axe.

On voit que cet énoncé n'est autre chose que la traduction de l'équation.

Pour le cercle ; ce rapport est l'unité, et il en résulte que *la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diamètre*, proposition démontrée en Géométrie.

En considérant l'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, on en déduira la même proposition.

59. L'équation

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2}$$

donne

$$\frac{y}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{b}{a}:$$

or $\sqrt{(a^2-x^2)}$ est l'ordonnée correspondante à l'abscisse x dans un cercle qui aurait pour centre et pour diamètre le centre et le grand axe de l'ellipse ; donc,

Si sur le grand axe d'une ellipse, comme diamètre, on décrit une circonférence, les ordonnées de l'ellipse seront à celles du cercle comme le petit axe est au grand axe.

Cette propriété fournit plusieurs moyens de construire géométriquement l'ellipse par points.

1°. Si l'on décrit une circonférence sur le grand axe BB', (fig. 16), comme diamètre, qu'au point P on élève l'ordonnée du cercle NP, que l'on joigne les extrémités B et C du grand et du petit axe, que l'on porte l'ordonnée AP de B en G, et qu'au point G on élève sur BB' une perpendiculaire qui rencontre BC en H, GH sera la longueur de l'ordonnée de l'ellipse correspondante à l'abscisse AP : on la ramènera sur NP au moyen d'une parallèle à l'axe BB', et l'on déterminera ainsi le point M de l'ellipse. En prenant de même $BG'=N'P'$, élevant la perpendiculaire $G'H'$, et menant la parallèle $H'M'$, on déterminera un autre point M', et ainsi des autres.

2°. Si l'on décrit (fig. 17) deux circonférences, l'une sur le grand axe, l'autre sur le petit axe, comme diamètres, que l'on élève l'ordonnée NP à la première circonférence, et que l'on mène le rayon AN qui coupe la seconde en n, le point M où NP sera rencontrée par la droite nM parallèle au grand axe, est un point de l'ellipse.

3°. D'un point quelconque G (fig. 18) pris sur le petit axe, pourvu que GA soit $< a-b$, on décrira, avec cette différence, comme rayon, un arc de cercle qui coupe le grand

axe en H; on joindra GH que l'on prolongera d'une quantité $HM = b$, le point M sera un point de l'ellipse.

Nous ne nous arrêterons pas à donner la démonstration de ces constructions, dont les deux premières n'offrent pas la moindre difficulté. A l'égard de la troisième, en prolongeant MP au-dessous de AB, et menant GQ parallèle à AB, on trouvera facilement que MQ est l'ordonnée d'un cercle qui a pour rayon la moitié du grand axe, et de là, on pourra achever la démonstration.

60. Pour passer de l'équation de l'ellipse rapportée aux axes à l'équation de cette courbe rapportée à deux diamètres conjugués quelconques $2m$, $2n$, et réciproquement, on a les relations

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2, \quad mn \sin \nu = ab,$$
$$\operatorname{tang} \nu = \operatorname{tang} (\beta - \alpha), \quad a^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta + b^2 = 0;$$

les deux premières ne sont qu'une nouvelle expression des propositions du n° 54, la troisième est évidente, et la quatrième résulte de l'équation

$$2A \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta + B (\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta) + 2C = 0,$$

en y faisant $B = 0$, $A = a^2$, $C = b^2$, c'est-à-dire, en supposant que l'on soit parti de l'équation aux axes principaux.

A l'aide de ces relations on peut déterminer quatre des sept quantités m, n, α, β, a, b, ν, quand on connait les trois autres. Nous ne nous arrêterons qu'aux trois cas suivans :

1°. *Étant donnés les axes, et l'angle α que fait un diamètre avec le grand axe, trouver l'angle de ces diamètres et leurs longueurs.*

La quatrième équation donne sur-le-champ

$$\operatorname{tang} \beta = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tang} \alpha},$$

et l'on voit que si $\operatorname{tang} \alpha$ est positive, $\operatorname{tang} \beta$ sera négative, et

réciproquement ; c'est-à-dire, que des deux angles α et β, l'un est toujours aigu et l'autre obtus. D'ailleurs on a

$$\text{tang } \Psi = \frac{\text{tang } \beta - \text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \beta},$$

ou, substituant la valeur trouvée pour tang β,

$$\text{tang } \Psi = -\frac{b^2 + a^2 \text{ tang}^2 \alpha}{(a^2 - b^2) \text{ tang } \alpha}.$$

Cette expression prouve encore que tang Ψ et tang α sont de signe contraire, et partant, que l'angle Ψ est obtus quand l'angle α est aigu. Or l'un des deux diamètres faisant avec le grand axe un angle aigu, on peut toujours supposer que ce soit celui-là que l'on ait pris pour α. Donc, dans tous les cas, *l'angle que deux diamètres conjugués font au-dessus ou au-dessous du grand axe, est nécessairement obtus*, et par conséquent *celui qu'ils font entre eux à droite ou à gauche du petit axe est aigu, puisqu'il est le supplément du premier.*

On peut facilement conclure de là, d'après ce qui a été dit (n° 53), que les cordes qui joignent un point de l'ellipse et les extrémités du grand axe, font un angle obtus entre elles, tandis que celles qui joignent un point de l'ellipse et les extrémités du petit axe, font un angle aigu.

Ψ étant connu, les deux premières équations feront connaître m et n comme dans le problème suivant.

2°. *Étant donnés les axes et l'angle que doivent faire deux diamètres conjugués, trouver leur longueur et leur direction.*

Les deux premières équations donnent directement m et n. Si l'on divise la seconde par sin Ψ, et qu'on la multiplie par 2, on tire de ces deux équations, par addition et par soustraction,

$$(m+n)^2 = a^2 + 2\frac{ab}{\sin \Psi} + b^2,$$

$$(m-n)^2 = a^2 - 2\frac{ab}{\sin \Psi} + b^2,$$

d'où l'on déduit facilement m et n.

Les deux dernières équations serviront à déterminer α et β; en éliminant β entre ces deux équations, on trouve

$$a^2 \operatorname{tang}^2\alpha + (a^2 - b^2) \operatorname{tang} \Psi \operatorname{tang}\alpha + b^2 = 0.$$

Comme cette équation est du second degré, il s'ensuit qu'il y a deux solutions, et par conséquent deux systèmes de diamètres conjugués, qui font entre eux un angle donné. Ces deux solutions se réduisent à une seule, quand l'équation devient un quarré. Or il faut pour cela que l'on ait

$$(a^2 - b^2)^2 \operatorname{tang}^2\Psi = 4a^2b^2,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} \Psi = \frac{-2ab}{a^2 - b^2},$$

si l'on regarde l'angle Ψ comme obtus. On a, dans ce cas, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{b}{a}$. Comme on déduit aussi de la valeur de $\operatorname{tang}\Psi$, $\sin\Psi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, il s'ensuit que cette hypothèse donne

$$m - n = 0, \quad \text{ou} \quad m = n;$$

ainsi les deux diamètres conjugués sont égaux. Il suit de là que les diamètres conjugués sont les diagonales du rectangle formé sur les axes, ou encore, qu'ils sont parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des axes.

Enfin l'équation devient absurde quand on a

$$(a^2 - b^2) \operatorname{tang}^2\Psi < 4a^2b^2,$$

ou, abstraction faite du signe,

$$\operatorname{tang}\Psi < \frac{2ab}{a^2 - b^2};$$

résultat qu'on aurait pu tirer du n° 41, et qui prouve que les demi-diamètres conjugués égaux font entre eux le plus petit angle aigu, ou le plus grand angle obtus possible. Il s'ensuit

encore que, de tous les angles obtus qui ont leur sommet à la circonférence de l'ellipse, et qui s'appuient sur le grand axe, le plus grand est celui qui a l'extrémité du petit axe pour sommet, et que de tous les angles aigus qui ont leur somme à la circonférence de l'ellipse, et s'appuient sur le petit axe, le plus petit est celui dont le sommet se confond avec celui de l'ellipse.

3°. *Étant donnés deux diamètres conjugués et l'angle qu'ils font entre eux, trouver les axes principaux et leur direction.*

Comme on connaît m, n et ν, les deux premières relations détermineront a et b; en multipliant la seconde par 2, on trouve par addition et soustraction

$$(a+b)^2 = m^2 + 2mn\sin\nu + n^2,$$
$$(a-b)^2 = m^2 - 2mn\sin\nu + n^2.$$

Ces valeurs sont faciles à construire, en formant des triangles qui aient m et n pour côtés et pour l'angle compris $\frac{\pi}{2} - \nu$, ou $\frac{\pi}{2} + \nu$.

Les valeurs de a et b une fois déterminées, les deux dernières équations serviront à trouver α et β, ou α seulement, car il est évident que la connaissance de l'un de ces angles suffit.

En faisant les substitutions nécessaires pour que l'équation générale devienne $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, on trouverait aussi :

$$m^2 = \frac{S}{Q} = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha},$$
$$n^2 = \frac{S}{P} = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta},$$

équations dont on peut également se servir, mais qui rentrent dans les premières.

61. Mais si l'on veut supposer la courbe décrite, ces pro-

blèmes sont susceptibles d'une solution géométrique très-simple.

Nous observerons d'abord que, la courbe étant donnée, on peut toujours en trouver le centre. Car si l'on mène dans une direction quelconque deux cordes parallèles, et que l'on joigne leurs milieux par une droite, cette droite sera un diamètre (n° 40), et le milieu de ce diamètre lui-même sera le centre de l'ellipse.

Un diamètre étant donné, il sera facile de trouver son conjugué. En effet, on mènera, par le centre, un diamètre quelconque; par l'une des extrémités, une corde parallèle au diamètre donné; on joindra l'autre extrémité et celle de la corde par une seconde corde qui sera nécessairement (n° 53) parallèle au diamètre conjugué. On pourrait aussi mener une corde quelconque parallèle au diamètre donné, et joindre son milieu avec le centre par une droite qui sera le diamètre conjugué.

On pourra encore déterminer facilement les axes, quand on connaît le centre; car menant un diamètre quelconque, et sur ce diamètre décrivant une demi-circonférence, cette demi-circonférence coupera celle de l'ellipse en deux points, et les cordes menées de ces points aux extrémités du diamètre seront rectangulaires entre elles, et partant parallèles aux axes principaux.

Pour déterminer la direction de deux diamètres qui font un angle donné, on mènera toujours un diamètre quelconque, et sur ce diamètre comme corde, on décrira un segment capable de l'angle donné. Si l'arc de cercle ne rencontrait pas l'ellipse, on ferait la construction sur le diamètre conjugué, ou sur le même diamètre en prenant le supplément de l'angle donné, et si dans aucun cas l'arc de cercle ne rencontrait l'ellipse, le problème serait impossible, car on sait que l'angle φ n'est pas entièrement arbitraire.

Nous insistons peu sur ces constructions, qui sont plus curieuses qu'utiles, puisqu'elles exigent que la courbe soit tra-

cée, ce qui ne permet pas de compter sur une grande exactitude.

62. Nous avons vu (n° 48) que la tangente à un point de la courbe était parallèle au conjugué du diamètre qui passe par ce point, ainsi l'on peut encore tirer de ce qui précède, une construction géométrique pour mener une tangente à un point donné de l'ellipse. Il faut mener un diamètre quelconque et celui qui passe par le point donné, et faire ensuite la même construction que pour trouver le conjugué de ce dernier diamètre, excepté qu'au lieu de mener par le centre une parallèle à la seconde corde, on la mènera par le point donné. Mais cette construction exige toujours que la courbe soit décrite.

Au reste, la même considération peut nous conduire à l'équation de la tangente. En effet, si α est l'angle que fait avec le grand axe le diamètre qui passe par le point donné, en nommant β l'angle que fait son conjugué, ou, ce qui revient au même, la tangente, on a par la relation connue

$$a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta + b^2 = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang}\alpha};$$

mais si x', y' sont les coordonnées du point donné, on a $\operatorname{tang}\alpha = \frac{y'}{x'}$, et partant

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'};$$

comme d'ailleurs la tangente passe par le point donné, son équation est

$$y - y' = \operatorname{tang}\beta\,(x - x'),$$

ou

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x').$$

En chassant le dénominateur, et transposant, on trouve

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2x'^2 + b^2x'^2 :$$

or on a $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, puisque le point donné est sur la courbe ; donc l'équation de la tangente peut encore se présenter sous la forme

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$$

qui est facile à retenir, par son analogie avec l'équation de la courbe.

Si l'on fait $y = 0$, en désignant par x'' la valeur qui résulte pour x, on trouve

$$x'' = \frac{a^2}{x'},$$

pour la distance du centre au point où la tangente rencontre le grand axe.

Cette expression très-facile à construire, fournit une méthode élégante pour mener une tangente à l'ellipse, sans supposer la courbe décrite. Soit en effet M (fig 19) le point donné ; du centre de l'ellipse, avec un rayon égal au demi-grand axe, on décrira un arc de cercle qui coupe le prolongement de l'ordonnée en N ; on joindra AN, et élevant au point N sur cette droite une perpeudiculaire NT, on aura $AT = \frac{a^2}{x'}$.

Pour le cercle, les équations de la tangente deviennent respectivement

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'), \quad yy' + xx' = a^2 ;$$

la première prouve évidemment que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de contact. Au reste, cette vérité s'était déjà manifestée, dès

le moment où nous avons prouvé que, dans le cercle, tous les diamètres conjugués sont rectangulaires entre eux.

On appelle *soutangente* la distance PT' du pied de la tangente au pied de l'ordonnée ; on voit, au premier abord, qu'elle est égale à $x'' - x'$; ainsi l'on a

$$PT = x'' - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}.$$

63. On parvient encore à la construction précédente, par une consideration que nous ne devons pas laisser échapper. La valeur de AT ne renfermant ni b, ni y' sera la meme, quel que soit b ; de sorte que si l'on imagine une suite d'ellipses décrites sur le meme grand axe BB', et que prolongeant l'ordonnée MP de manière qu'elle les coupe toutes, on mène à chacune d'elles une tangente par ces points d'intersection, ces tangentes viendront rencontrer le prolongement du grand axe au meme point T. Or parmi toutes ces ellipses se trouvera celle dont les axes sont égaux, c'est-à-dire, le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Ainsi, en menant une tangente au point N où ce cercle est rencontré par l'ordonnée MP, elle coupera le grand axe au point T, ce qui revient précisément à la construction de la troisième proportionnelle $\frac{a^2}{x'}$.

64. La considération des diamètres conjugués nous a conduits naturellement à l'équation de la tangente ; mais nous aurions pu y parvenir d'une manière directe et indépendante des principes précédens.

La tangente devant passer par le point dont les coordonnées sont x', y', son équation sera de la forme

$$y - y' = A(x - x').$$

Si l'on élimine entre cette équation et celle de la courbe, l'équation finale sera généralement du second degré, et don-

nera les coordonnées des points d'intersection qui seront distincts, tant qu'on exprimera seulement que la droite passe par le point dont les coordonnées sont x', y', qui sera lui-même une des intersections. Mais quand la droite est tangente, les intersections se réduisent à un seul point ; ainsi les racines de l'équation finale doivent être égales entre elles.

Au lieu d'éliminer directement entre l'équation de la ligne droite et celle de la courbe, nous observerons que les deux valeurs qui doivent résulter pour x et y étant x' et y', on doit avoir pour chacune d'elles $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$; ainsi, en faisant d'avance $x - x' = X$, $y - y' = Y$, c'est-à-dire, $x = x' + X$, $y = y' + Y$, et substituant ces valeurs à la place de x et de y, on aura deux équations en X et Y telles que l'équation résultante de l'élimination devra avoir ses deux racines nulles.

L'équation de la droite devient

$$Y = AX;$$

celle de l'ellipse

$$a^2Y^2 + b^2X^2 + 2a^2y'Y + 2b^2x'X + a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 = 0,$$

qui se réduit évidemment à

$$a^2Y^2 + b^2X^2 + 2a^2y'Y + 2b^2x'X = 0,$$

à cause de l'équation $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, ou, en mettant AX à la place de Y, à

$$(a^2A^2 + b^2)X^2 + 2(a^2y'A + b^2x')X = 0,$$

qui donne d'abord $X = 0$, c'est-à-dire, $x = x'$, comme on devait s'y attendre. Mais pour que la seconde valeur de X soit encore égale à zéro, il faut que l'on ait

$$a^2y'A + b^2x' = 0, \quad \text{ou} \quad A = -\frac{b^2x'}{a^2y'},$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

Il est évident que la transformation précédente revient à placer l'origine au point donné.

On voit que rien n'empêcherait d'appliquer, mot pour mot, les mêmes raisonnemens, dans le cas où l'on partirait de l'équation de la courbe rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, pourvu que l'on fasse attention que A n'est plus une tangente. Ainsi, lorsque l'équation de l'ellipse est

$$m^2u^2 + n^2t^2 = m^2n^2,$$

on a pour l'équation de la tangente

$$u - u' = -\frac{n^2t'}{m^2u'}(t - t'),$$

ou

$$m^2uu' + n^2tt' = m^2n^2.$$

65. Si le point par lequel on doit mener la tangente est hors de la courbe, nommons p et q ses coordonnées, x', y' étant toujours celles du point de contact, qui sont maintenant inconnues. Les coordonnées p et q doivent satisfaire à l'équation de la tangente

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2,$$

et l'on a par conséquent l'équation

$$a^2qx' + b^2py' = a^2b^2 \ldots\ldots (1);$$

d'ailleurs le point de contact devant se trouver sur la courbe, on a encore, entre x' et y', l'équation

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (2);$$

de sorte que par l'élimination on trouvera les valeurs de x', y' : ces valeurs seront doubles, puisque l'équation est du second degré ; ainsi il y a deux solutions.

Mais:, 1°. sans exécuter cette opération, l'équation (1) fait voir que les deux points de contact se trouvent sur une ligne droite qui rencontre le grand axe en un point dont l'abscisse est $\frac{a^2}{p}$;

et le petit axe en un point dont l'ordonnée est $\frac{b^2}{q}$; expressions faciles à construire par elles-mêmes, mais surtout par les remarques suivantes.

L'expression $\frac{a^2}{p}$ étant indépendante de a, sera la même pour toutes les ellipses qui auront même grand axe, et partant, pour le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

L'expression $\frac{b^2}{q}$ étant indépendante de a, sera la même pour toutes les ellipses qui auront même petit axe, et partant, pour le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

Donc (fig. 20) on trouvera le point p où la droite cherchée rencontre le grand axe; en décrivant sur cet axe, comme diamètre, une circonférence, menant du point donné N deux tangentes $N\mu$, $N\mu'$, et joignant les points de contact par une corde $\mu\mu'$, qui coupera le grand axe au point demandé. On trouvera de même le point q où la droite cherchée rencontre le petit axe. Cette droite une fois connue, ses intersections avec la courbe détermineront les points de contact.

Ce qui précède ne souffre aucune difficulté pour la détermination du point où la corde qui joint les points de contact rencontre le petit axe; mais à l'égard du point où elle rencontre le grand axe, le procédé que nous avons indiqué suppose que le point donné ne se trouve pas dans l'intérieur du cercle décrit sur le grand axe; ce qui peut évidemment arriver, comme pour le point N (fig. 21). Mais alors une autre considération servirait à déterminer ce point. En effet, p étant alors $< a$, un point de la circonférence décrite sur le grand axe se trouvera sur la direction de l'ordonnée q, et si l'on mène à ce point R une tangente Rp, la distance du centre au pied de cette tangente sera précisément $\frac{a^2}{p}$; ainsi le pied de la tangente sera le point cherché, et la construction n'en est que plus simple.

2°. L'expression $\frac{a^2}{p}$ est indépendante de q; donc elle sera encore la même pour tout point situé sur la perpendiculaire élevée au point du grand axe dont l'abscisse est p. Ainsi : *si une droite* NQ (fig. 22) *est perpendiculaire sur le grand axe de l'ellipse, et que de tant de points qu'on voudra* n, n′, n″, *etc. de cette droite, on mène deux tangentes à la courbe, les cordes* nμ, n′μ′, n″μ″, etc. *qui joignent les deux points de contact, coupent le grand axe en un point constant.*

La même propriété a lieu par rapport au petit axe.

Au voit au reste sans difficulté que cette propriété n'est pas particulière aux axes, et qu'en considérant l'équation de l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués quelconques, et l'équation de la tangente rapportée aux mêmes axes, on obtiendra les mêmes résultats; d'où suit le théorème suivant :

Si de tant de points qu'on voudra d'une droite quelconque, on mène deux tangentes à l'ellipse, et que l'on joigne par des cordes les points de contact des tangentes qui partent du même point, toutes ces cordes se couperont en un même point fixe, situé sur le conjugué du diamètre mené parallèlement à la droite donnée (*).

Il est aisé de se convaincre que la réciproque a également lieu, c'est-à-dire, que :

Si par un point quelconque pris dans le plan de l'ellipse, on mène des droites qui rencontrent la courbe, et qu'à chaque point d'intersection on mène une tangente, les sommets des angles formés par les tangentes menées des points que détermine une même sécante, se trouveront sur une même droite; et cette droite est parallèle au conjugué du diamètre qui passe par le point fixe.

66. La considération des tangentes est très-propre à ma-

(*) Cette propriété avait été remarquée et démontrée dans le Traité des Sections coniques de *Lahire*.

nifester la forme de la courbe, puisqu'en imaginant une infinité de tangentes menées à des points très-rapprochés l'un de l'autre, ces tangentes, par leurs intersections, formeront un polygone circonscrit à la courbe.

Elles peuvent servir à démontrer que l'ellipse tourne sa concavité ou sa convexité vers l'axe, suivant que les ordonnées, tant à droite qu'à gauche du point de contact, sont plus grandes ou plus petites pour la tangente que pour la courbe. Cela posé, l'équation de l'ellipse donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

l'équation de la tangente

$$y = -\frac{b^2}{a^2 y'}(a^2 - xx');$$

si l'on élève cette dernière valeur au quarré, on trouve

$$y^2 = \frac{b^4}{a^4 y'^2}(a^2 - xx')^2,$$

ou, comme $a^2y'^2 = b^2(a^2 - x'^2)$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(a^2 - xx')^2}{a^2 - x'^2}.$$

Ainsi la différence du quarré de l'ordonnée de la tangente au quarré de l'ordonnée de l'ellipse est

$$\frac{b^2}{a^2}\left\{\frac{(a^2 - xx')^2 - (a^2 - x^2)(a^2 - x'^2)}{a^2 - x'^2}\right\},$$

ou, en effectuant et réduisant,

$$b^2 \cdot \frac{(x - x')^2}{a^2 - x'^2};$$

or cette différence est essentiellement positive; et comme

l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente sont toujours de même signe dans le cas actuel, la différence entre les ordonnées elles-mêmes sera aussi positive ; donc l'ordonnée de la tangente est toujours plus grande que l'ordonnée correspondante pour l'ellipse. Ainsi cette courbe tourne sa concavité vers le grand axe. On démontrerait absolument de la même manière, qu'elle tourne aussi sa concavité vers le petit axe.

67. On appelle *normale* la droite MN (fig. 23) qui passe par le point de contact, et qui est perpendiculaire à la tangente. Ainsi, x', y' étant toujours les coordonnées du point de contact, l'équation de la normale est pour l'ellipse

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

ou
$$a^2 y' x - b^2 x' y = (a^2 - b^2) x' y',$$

et donne, quand $y = 0$, en désignant par x'' la valeur qui en résulte pour x,

$$x'' = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x' = x' - \frac{b^2}{a^2} x'.$$

Cette expression ne dépend que du rapport des axes; ainsi, pour toutes les ellipses dans lesquelles le rapport $\frac{b}{a}$ est constant, la normale menée aux points qui correspondent à la même abscisse, rencontre le grand axe au même point.

La *sounormale*, ou la distance PN du pied de l'ordonnée au pied de la normale, est évidemment

$$x'' - x' = -\frac{b^2}{a^2} x'.$$

Lorsque les axes des coordonnées ne sont pas perpendiculaires, mais forment un système de diamètres conjugués, l'équation de la tangente est (n° 64) de la même forme qne pour les axes principaux ; et m et n étant les demi-diamètres, t, u

les coordonnées du point de contact; on a, comme nous l'avons vu,

$$m^2uu' + n^2tt' = m^2n^2,$$

ou

$$u = -\frac{n^2t'}{m^2u'}\left(t - \frac{m^2}{t'}\right).$$

La normale passant par le point de contact, son équation sera de la forme

$$u - u' = A'(t - t');$$

et comme elle doit être perpendiculaire à la tangente, on aura (n° 21)

$$A' = \frac{1 - \frac{n^2t'}{m^2u'}\cos\varphi}{-\frac{n^2t'}{m^2t'} + \cos\varphi} = \frac{m^2u' - n^2t'\cos\varphi}{m^2u'\cos\varphi - n^2t'},$$

et substituant cette valeur au lieu de A', on aura l'équation de la normale.

68. Un cercle peut rencontrer l'ellipse en quatre points; si deux de ces points se réunissent en un seul, le cercle est tangent à la courbe; et l'on voit que l'on exprimera cette circonstance, en faisant passer le cercle par le point dont les coordonnées sont x', y', éliminant entre l'équation du cercle et celle de la courbe, et exprimant que l'équation finale doit avoir deux racines égales. Mais comme l'équation du cercle renferme trois constantes, et que jusqu'à présent nous n'avons satisfait qu'à deux conditions, une des constantes reste encore arbitraire, c'est-à-dire qu'il y a une infinité de cercles qui touchent la courbe en un même point. Parmi tous ces cercles, il en est un qui a un contact plus intime avec elle, et c'est celui que l'on obtiendra en imaginant que l'équation finale ait trois racines égales, et partant que trois points se réunissent en un seul. On appelle ce cercle, *cercle osculateur*, et son rayon, *rayon de courbure;* il sert en effet à

mesurer la courbure de la courbe, puisque le cercle osculateur est celui qui approche le plus de se confondre avec la courbe, et que par conséquent la courbure est d'autant plus grande que ce rayon est plus petit.

Cela posé, nommons p et q les coordonnées du centre du cercle, r son rayon, son équation sera (n° 57)

$$(y-q)^2+(x-p)^2=r^2.$$

Si, en imitant ce qu'on a fait pour la tangente, on suppose $y-y'=Y$, $x-x'=X$, ou $y=Y+y'$, $x=X+x'$, et que l'on substitue dans cette équation, elle devient

$$Y^2+X^2+2(y'-q)Y+2(x'-p)X=0.....(a)$$

à cause de l'équation

$$(y'-q)^2+(x'-p)^2=r^2,$$

qui exprime que le point dont les coordonnées sont x', y' est sur le cercle.

La même substitution change, comme au n° 64, l'équation de l'ellipse en

$$a^2Y^2+b^2X^2+2a^2y'Y+2b^2x'X=0.....(b)$$

Si l'on multiplie l'équation (a) par a^2, et qu'on en retranche l'équation (b), on trouve

$$(a^2-b^2)X^2-2a^2qY+2(a^2-b^2)x'X-2a^2pX=0;$$

d'où

$$Y=\frac{(a^2-b^2)X^2+2(a^2-b^2)x'X-2a^2pX}{2a^2q}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b), développant et ordonnant, après avoir fait pour abréger, $a^2-b^2=c^2$, on

obtient

$$\left.\begin{array}{llll} c^4X^4+4c^4x' & X^3+4c^4x'^2 & X^2+8a^2c^2qx'y' & X=0 \\ \quad -4a^2c^2p & \quad -8a^2c^2px' & \quad -8a^4pqy' & \\ & \quad +4a^4p^2 & \quad +8a^2b^2q^2x' & \\ & \quad +4a^2b^2q^2 & & \\ & \quad +4a^2c^2qy' & & \end{array}\right\}(c)$$

le coefficient de x peut se mettre sous la forme

$$8a^2q\,(c^2x'y' - a^2py' + b^2qx').$$

Pour que l'équation (*c*) ait deux racines égales à zéro, il faut que le coefficient de X soit nul : or on peut l'anéantir de deux manières ; la première, en supposant $q=0$; la seconde, en faisant

$$c^2x'y' - a^2py' + b^2qx' = 0.$$

Mais la première hypothèse est inadmissible, car il ne suffit pas que les deux valeurs de X soient nulles, il faut que les valeurs correspondantes de Y le soient aussi. Or si l'on fait en même temps $q=0$ et $X=0$ dans la valeur de Y, elle devient $\frac{0}{0}$; substituant alors dans les équations (*a*) et (*b*), elles se réduisent toutes deux à

$$Y^2 + 2y'Y = 0,$$

qui ne donne qu'une fois $Y=0$. Il est facile de voir au reste que l'hypothèse $q=0$ place le centre du cercle sur le grand axe, et que l'équation (*c*) devient un quarré, de sorte que les deux autres racines sont encore égales. D'où l'on peut conclure que si une ellipse est coupée par un cercle dont le centre est sur le grand axe, les quatre points d'intersection se trouveront sur deux droites perpendiculaires au grand axe.

La seconde hypothèse donne entre p et q une équation qui est précisément celle de la normale menée au point dont les coordonnées sont x', y', et d'ailleurs il est évident que dans

ce cas, pour une même valeur de X, il n'y a qu'une valeur de Y qui satisfasse aux deux équations, et que cette valeur est $Y = 0$, quand $X = 0$. Donc cette seconde hypothèse est admissible; et partant :

Tout cercle dont le centre est placé sur la normale, et qui passe par le point où cette droite rencontre la courbe, est tangent à ce point, et réciproquement.

Le coefficient de X^3 peut se mettre sous la forme

$$4\{(c^2x' - a^2p)^2 + a^2q(b^2q + c^2y')\}.$$

L'équation de la normale à laquelle satisfont, comme nous venons de le voir, les coordonnées p et q, donne

$$c^2x' - a^2p = -\frac{b^2qx'}{y'};$$

ainsi, en substituant cette valeur dans l'équation précédente elle devient

$$4.\frac{b^2q^2(a^2y'^2 + b^2x'^2) + a^2c^2qy'^2}{y'^2},$$

ou, à cause de l'équation $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$,

$$4.\frac{a^2q}{y'^2}(b^2q + c^2y'^2).$$

Or, pour qu'il y ait trois racines égales à zéro, il faut que ce coefficient soit nul; et comme l'hypothèse $q = 0$ est inadmissible, on aura

$$b^2q + c^2y'^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad q = -\frac{c^2y'^2}{b^2}.$$

Connaissant la valeur de q, on tirera celle de p de l'équation

$$a^2py' - b^2qx' = c^2x'y';$$

on trouve

$$p = \frac{c^2x'}{a^2b^2}(b^2 - y'^2) = \frac{c^2x'^3}{a^2}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver le rayon r; or on a

$$r^2 = (y' - q)^2 + (x' - p)^2;$$

et d'après les valeurs de p, q,

$$x' - p = \frac{a^4 - c^2 x'^2}{a^4} x',$$

$$y' - q = \frac{b^4 + c^2 y'^2}{b^4} y' = \frac{a^2 b^4 + a^2 b^2 c^2 - b^2 c^2 x'^2}{a^2 b^4} y' = \frac{a^4 - c^2 x'^2}{a^2 b^2} y';$$

donc

$$r^2 = \frac{(a^4 - c^2 x'^2)^2 (a^4 y'^2 + b^4 x'^2)}{a^8 b^4}$$

$$= \frac{(a^4 - c^2 x'^2)^3}{a^8 b^2},$$

et partant

$$r = \frac{(a^4 - c^2 x'^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

La valeur du rayon de courbure est d'autant plus petite, et par conséquent la courbure d'autant plus grande, que l'abscisse approche plus de a; ainsi c'est aux sommets que la courbure de l'ellipse est la plus grande possible : on a pour ces points

$$p = \frac{c^2}{a}, \quad q = 0, \quad r = \frac{b^2}{a}.$$

Au contraire, c'est aux extrémités du petit axe que la courbure est la moindre, et l'on a pour lors

$$p = 0, \quad q = \mp \frac{c^2}{b}, \quad r = \frac{a^2}{b}.$$

Il est aisé de voir que les centres des cercles osculateurs sont situés sur une certaine ligne courbe, dont on trouverait l'équation en éliminant x', y' entre les valeurs de p, q et l'équation

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2;$$

elle est du sixième degré, mais l'examen de cette courbe nous détournerait trop de notre sujet. Nous nous contenterons de prévenir qu'elle rencontre le grand axe aux points b, b' (fig. 24), dont la distance au centre est $\frac{c^2}{a}$, et le petit axe aux points c, c', dont la distance au centre est $\frac{c^2}{b}$, et qu'elle touche ces axes aux points de rencontre, en affectant la forme.... $bmcm'b'm''c'm'''$.

Dans le calcul différentiel, on prouve une propriété remarquable de ces sortes de courbes, mais que nous ne pouvons exposer ici : cette propriété consiste en ce que si l'on imagine un fil attaché au point c', et appliqué sur la partie $bm''c'$ de la courbe des centres, et sur la partie Bb du grand axe, et que l'on développe ce fil de manière qu'il reste toujours tendu, l'extrémité mobile qui se trouvait d'abord au point B, décrira la partie BMC de l'ellipse. C'est de cette propriété générale pour toutes les courbes, que la courbe des centres a pris le nom de *développée;* et dans ce cas, la courbe décrite se nomme *développante.*

69. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que l'équation

$$Pu^2 + Qt^2 + \frac{\Delta}{G} = 0;$$

mais l'équation

$$Pu^2 + Qt^2 + Rt = 0$$

appartient aussi à l'ellipse, quand P et Q sont de même signe. Or nous savons que cette forme a lieu lorsque l'axe des t est un diamètre, et que l'axe des u est tangent à la courbe à l'extrémité de ce diamètre, c'est-à-dire lorsqu'elle est parallèle au diamètre conjugué; R étant positif ou négatif, suivant que l'origine est à droite ou à gauche du centre.

Il est clair que si l'équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués, est

$$m^2u^2 + n^2t^2 = m^2n^2,$$

on trouvera l'équation de cette courbe rapportée au diamètre qui sert d'axe des abscisses et à la tangente menée par une de ses extrémités, en substituant $t+m$ ou $t-m$ à la place de t, suivant que l'on voudra prendre pour origine l'une ou l'autre extrémité. On trouve, substitution faite,

$$m^2u + n^2t^2 \pm 2mn^2t = 0 :$$

l'équation de l'ellipse rapportée au grand axe et à la tangente parallèle au petit axe, est donc

$$a^2y^2 + b^2x^2 \pm 2ab^2x = 0.$$

Il est facile d'obtenir, relativement aux mêmes axes, les équations de la tangente, de la normale et du cercle osculateur, parce qu'il suffit de substituer dans les équations que nous avons trouvées, $x-a$ à la place de x, si l'on veut se borner au cas où l'origine est à gauche du centre. Nous ne nous arrêterons pas à ces transformations qui n'offrent aucune difficulté.

70. Nous avons vu que pour passer, de l'équation d'une courbe rapportée à des axes, à l'équation polaire, il fallait substituer pour x et pour y les valeurs

$$x = p + z\cos\varphi, \quad y = q + z\sin\varphi,$$

q et z étant l'angle et le rayon variables; p et q les coordonnées du pôle.

Si nous introduisons ces valeurs dans l'équation de l'ellipse rapportée aux axes principaux, elle devient

$$\left.\begin{array}{llll} a^2\sin^2\varphi & z^2 + 2a^2q\sin\varphi & z + a^2q^2 & \\ + b^2\cos^2\varphi & + 2b^2p\cos\varphi & + b^2p^2 & \\ & & - a^2b^2 & \end{array}\right\} = 0 \ldots (p)$$

et pour le cercle, en faisant $a=b$, et observant que $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$,

$$z^2 + 2(q\sin\varphi + p\cos\varphi)z + q^2 + p^2 - a^2 = 0 :$$

les deux valeurs de z donnent évidemment les deux rayons variables dirigés suivant la droite qui fait l'angle φ avec l'axe, et comme le produit des deux racines d'une équation du second degré est égal au dernier terme, qui pour le cercle est $q^2+p^2-a^2$, expression indépendante de l'angle φ, il s'ensuit *que si par un même point situé sur le plan d'un cercle, on mène une droite quelconque, le produit des parties interceptées entre le point et la circonférence est constant.* D'où résultent les propositions connues en Géométrie, sur les sécantes et les cordes qui se coupent.

En disposant des indéterminées p et q, nous pourrons simplifier l'équation (p).

1°. On ne peut faire disparaître le coefficient de z, sans déterminer φ, qu'en supposant à-la-fois $p=0$ et $q=0$; alors le pôle est au centre, et l'équation se réduit à

$$z^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},$$

ou

$$z=\frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}},$$

valeur du demi-diamètre qui fait avec le grand axe un angle φ.

Cette équation devient pour le cercle $z=a$, comme on devait s'y attendre.

2°. Si l'on fait disparaître le dernier terme par la supposition $a^2q^2+b^2p^2-a^2b^2=0$, le pôle sera sur la circonférence de l'ellipse, et l'équation devient

$$(a^2\sin^2q+b^2\cos^2\varphi)z^2+2(a^2q\sin\varphi+b^2p\cos\varphi)z=0,$$

qui donne $z=0$, quel que soit φ, et

$$z=-\frac{2(a^2q\sin\varphi+b^2p\cos\varphi)}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}.$$

On retombe par cette équation, et d'une manière très-simple,

sur la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec le grand axe une droite tangente à la courbe. En effet, si le rayon vecteur est tangent, les deux valeurs de z sont nulles, ce qui exige qu'on ait

$$a^2q\sin\varphi + b^2p\cos^2\varphi = 0,$$

ou

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{b^2p}{a^2q}.$$

Pour le cercle, cette équation se simplifie beaucoup, elle est

$$z = -2(q\sin\varphi + p\cos\varphi);$$

et même, comme l'une des indéterminées p et q est arbitraire, on peut supposer que l'une d'elles soit nulle, q par exemple; alors le pôle est à l'extrémité d'un diamètre du cercle, $p = \pm r$, et l'équation se réduit à

$$z = \mp 2r\cos\varphi;$$

pour un autre cercle de rayon r', mais qui aurait son centre sur la même droite que le premier, et passerait par le même point de leur commun diamètre, on aurait de même

$$z' = \mp 2r'\cos\varphi',$$

et si l'on suppose $\varphi' = \varphi$, on tire de là

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'},$$

d'où résulte cette proposition, que l'on démontre au reste avec facilité par la Géométrie :

Si deux cercles se coupent, et que par leur point de contact on mène une droite qui les coupe, les parties de cette droite, comprises entre le point de contact et les deux circonférences, sont proportionnelles aux rayons.

3°. Si l'on fait $q = 0$, c'est-à-dire, si l'on suppose le pôle sur le grand axe, et que l'on remplace $\sin^2\varphi$ par $1 - \cos^2\varphi$,

l'équation (*p*) pourra se mettre sous la forme

$$a^2z^2 = (a^2 - b^2)\,z^2\cos^2\varphi - 2b^2pz\cos\varphi + b^2(a^2 - p^2).$$

Au moyen de l'indéterminée p, on peut rendre le second membre un quarré parfait, en posant (alg.)

$$b^2(a^2 - b^2)(a^2 - p^2) = b^4p^2,$$

ou

$$(a^2 - b^2)(a^2 - p^2) = b^2p^2;$$

d'où l'on tire

$$p^2 = a^2 - b^2 = c^2 \text{ (n° 68)};$$

partant $p = \pm c$.

L'équation devient alors, en observant que $a^2 - b^2$ peut se remplacer par c^2 et $a^2 - p^2$ par b^2,

$$a^2z^2 = (cz\cos\varphi - b^2)^2,$$

ou enfin

$$az = \pm(cz\cos\varphi - b^2);$$

d'où l'on tire, à cause du double signe, et supposant c positif,

$$z = \frac{-b^2}{a - c\cos\varphi}, \quad z = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}.$$

Or comme $c < a$ et $\cos\varphi < 1$, la première valeur est toujours négative, quel que soit l'angle φ, tandis que la seconde est toujours positive; la première donne donc la partie de l'ellipse située au-dessous du grand axe, la seconde la partie située au-dessus.

En prenant c négatif, ces valeurs deviennent

$$z' = \frac{-b^2}{a + c\cos\varphi'}, \quad z' = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi'},$$

dont la première est aussi toujours négative, et la seconde toujours positive.

Ces équations ont l'avantage de donner rationnellement le

rayon variable en fonction de l'angle, et l'angle en fonction du rayon variable. Mais on en déduit facilement une propriété très-remarquable de l'ellipse ; nous conviendrons, avant tout, d'appeler *pôle positif* celui dont l'abscisse est positive, et *pôle négatif* celui dont l'abscisse est négative.

Si nous rapportons un même point M (fig. 25) de la courbe à chacun des deux pôles, on aura pour ce point

$$z = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}, \quad z' = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi'},$$

z, z' étant les rayons variables FM, $F'M$, et φ, φ' les angles qu'ils font respectivement avec le grand axe. On exprimera que ces équations donnent le même point M en écrivant la condition (Trig. n° 38),

$$z'\cos\varphi' - z\cos\varphi = 2c,$$

pourvu que l'on fasse attention que $\cos MFF' = -\cos MFB = -\cos\varphi$. Or les équations précédentes donnent

$$az + cz\cos\varphi = b^2,$$
$$az' - cz'\cos\varphi' = b^2,$$

d'où

$$a(z + z') - c(z'\cos\varphi' - z\cos\varphi) = 2b^2;$$

substituant $2c$ à la place de $z'\cos\varphi' - z\cos\varphi$, et divisant par a,

$$z + z' = \frac{2(b^2 + c^2)}{a} = 2a.$$

donc : *la somme des rayons variables menés d'un point quelconque aux deux pôles situés sur le grand axe, de côté et d'autre, à une distance* $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ *du centre, est constante et égale au grand axe.*

Ces pôles remarquables s'appellent *foyers* de l'ellipse, et les rayons variables *rayons vecteurs*. Il est facile de déterminer géométriquement les foyers, en décrivant avec le demi-grand axe comme rayon, et de l'extrémité du petit axe comme

centre, un arc de cercle qui coupera le grand axe en deux points qui seront évidemment les foyers.

Si l'on veut avoir les rayons vecteurs en fonction de l'abscisse, comme on a $z\cos\varphi = x - p = x - c$, l'équation

$$az + cz\cos\varphi = b^2$$

donne

$$az + cx - c^2 = b^2,$$

ou

$$z = a - \frac{cx}{a}$$

pour le foyer positif, et

$$z' = a + \frac{cx}{a}$$

pour le foyer négatif; ces expressions conduisent encore au théorème précédent.

Si dans l'équation

$$z = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi},$$

on suppose l'angle φ droit, on a $\cos\varphi = 0$ et $z = \frac{b^2}{a}$, c'est l'ordonnée qui correspond au foyer; on voit qu'elle est rationnelle, et troisième proportionnelle au demi-grand axe et au demi-petit axe. Le double de cette quantité est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'ellipse.

71. La propriété des foyers donne un moyen de construire l'ellipse par points. En effet, si l'on prend une partie quelconque du grand axe, et que de l'un des foyers comme centre, et avec un rayon égal à cette partie on décrive un arc de cercle; que de l'autre foyer avec l'autre partie du grand axe, on décrive un nouvel arc de cercle, il coupera le premier en deux points qui appartiendront à l'ellipse. Si l'on double l'opération en échangeant entre eux les centres et les rayons, on déterminera quatre points avec les deux mêmes ouvertures de

compas. En prenant ensuite une autre partie du grand axe, on pourra encore déterminer quatre points, et ainsi de suite.

La même propriété donne aussi un moyen de décrire l'ellipse par un mouvement continu; en effet si l'on attache aux deux foyers les extrémités d'un fil, dont la longueur soit égale au grand axe, et que l'on fasse glisser un style sur ce fil, de manière à ce qu'il soit toujours tendu, la courbe sera décrite, quand le style aura achevé sa révolution.

72. Nous avons vu (n° 67) que la normale, à un point de l'ellipse dont les coordonnées sont x', y', rencontre le grand axe à une distance du centre

$$x'' = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x' = \frac{c^2 x'}{a^2};$$

il est aisé de voir que cette distance est toujours plus petite que c, puisqu'on a $cx' < a^2$. Ainsi les normales viennent toutes rencontrer le grand axe entre les deux foyers, c'est-à-dire entre les points F et F', et même dans un intervalle plus petit que FF', puisque la plus grande valeur de $\frac{c^2 x'}{a^2}$ a lieu lorsque $x' = a$, et devient $\frac{c^2}{a}$, comme on peut le conclure aussi de ce que nous avons vu (n° 68).

Si l'on cherche les distances FN, $F'N$ (fig. 25), on trouve, en faisant abstraction du signe,

$$FN = \frac{c}{a}\left(a - \frac{cx'}{a}\right),$$

$$F'N = \frac{c}{a}\left(a + \frac{cx'}{a}\right).$$

Or $a - \frac{cx'}{a}$, $a + \frac{cx'}{a}$ sont les valeurs de FM et $F'M$ respectivement; donc *les distances du pied de la normale aux foyers sont proportionnelles aux rayons vecteurs menés au point*

de contact, et partant (Géom.) *l'angle* FMF' *formé par les rayons vecteurs, est coupe en deux parties égales par la normale.* D'où l'on peut encore conclure que le supplément de cet angle, c'est-à-dire l'angle formé par un rayon vecteur et par le prolongement de l'autre, est coupé en deux parties égales par la tangente, ou enfin, que *les angles formés par la tangente et par les rayons vecteurs menés au point de contact, sont égaux entre eux.*

On serait parvenu au même résultat, en calculant les distances FT et $F'T$; car la proposition que l'on démontre en Géométrie pour la droite qui coupe en deux parties égales un angle d'un triangle, a lieu aussi pour celle qui coupe le supplément en deux parties égales.

Au reste, si l'on ne veut pas se servir de la proposition de géométrie sur laquelle nous nous sommes appuyés, on peut calculer les tangentes trigonométriques des angles FMN, $F'MN$; on les trouvera égales au signe près. On trouverait la même chose pour les angles FMT', $F'MT$.

73. Cette propriété de l'ellipse fournit un moyen très-simple de mener une tangente à l'ellipse par un point donné soit sur la courbe, soit au dehors.

1°. Soit le point M (fig. 26) donné sur la courbe. On mènera les rayons vecteurs FM, $F'M$; on prolongera l'un d'eux $F'M$, par exemple, d'une quantité Mf' égale à l'autre, on joindra $f'F$; la perpendiculaire abaissée du point M sur la droite $f'F$ sera la tangente cherchée.

2°. Soit le point N donné hors de la courbe; tout se réduirait encore à déterminer la droite Ff' sur laquelle la tangente est perpendiculaire. Cette droite passe par le foyer F, ainsi il ne resterait qu'à trouver le point f'. Or $F'f'$ est la somme des rayons vecteurs, c'est-à-dire le grand axe; d'ailleurs le point N doit être également éloigné du point F et du point f', et la distance FN est connue. Donc si du foyer F' on décrit une circonférence avec un rayon égal au grand axe; que du

point donné on décrive avec la distance de ce point à l'autre foyer une seconde circonférence qui coupe la première en deux points f', f'', et que l'on joigne chacun de ces points et le foyer F par les droites Ff', Ff'', les perpendiculaires Nn, Nn' abaissées du point N sur ces droites, seront tangentes à l'ellipse.

Si l'on suppose l'ellipse tracée, on voit encore que les droites $F'f'$, $F'f''$ détermineront les points de contact par leurs intersections avec la courbe. Mais le grand avantage de cette méthode est de ne pas exiger que la courbe soit décrite; on voit même que l'intersection de la droite Nn et de la droite $F'f'$, déterminant encore le point de contact, on pourrait, si l'on voulait, employer cette méthode pour construire l'ellipse par points.

74. On sait en physique, qu'un corps élastique qui vient frapper un plan dans une direction oblique, se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. De quelque manière que l'on considère la lumière et la chaleur, on sait que les rayons lumineux ou calorifiques jouissent de la même propriété. Ainsi, si nous supposons qu'un corps ou un rayon capable d'être réfléchi parte de l'un des foyers de l'ellipse, et vienne frapper un des points de sa circonférence, il sera dans le même cas que s'il rencontrait la tangente menée à ce point, et ira par conséquent se réfléchir à l'autre foyer; et si l'un des foyers est le centre d'un faisceau de rayons lumineux ou calorifiques, tous ceux qui iront frapper la circonférence de l'ellipse se réuniront à l'autre foyer. C'est de cette belle propriété que les foyers ont tiré leur nom. On en a profité pour en faire des applications aux arts, sous le rapport de l'utilité, et sous le rapport de l'agrément.

Du genre des Hyperboles.

75. Pour le genre des hyperboles, on a $G > 0$; Δ peut être indifféremment positif ou négatif; mais P et Q étant néces-

sairement de signe contraire, l'équation ne peut prendre que l'une des formes

$$Pu^2 - Qt^2 + \frac{\Delta}{G} = 0,$$

$$Qt^2 - Pu^2 + \frac{\Delta}{G} = 0,$$

si Δ est positif; et si l'on suppose Δ négatif, ces formes rentrent mutuellement l'une dans l'autre. Donc tout se réduit à considérer les deux formes d'équations précédentes. Mais il est encore aisé de voir que tout ce que l'on dira de la première, pourra se dire également de la seconde, pourvu que l'on renverse les axes, en prenant l'axe des ordonnées pour axe des abscisses, et réciproquement : de sorte que les deux équations appartiennent à une courbe de même nature, mais dans une situation différente par rapport aux axes. Nous nous bornerons par conséquent à l'examen de l'équation

$$Pu^2 - Qt^2 + \frac{\Delta}{G} = 0,$$

qui, en faisant $\frac{\Delta}{G} = S$, devient

$$Pu^2 - Qt^2 = -S.$$

On en tire

$$u = \sqrt{\frac{Qt^2 - S}{P}};$$

et faisant $t = 0$, il en résulte $u = \pm\sqrt{-\frac{S}{P}}$, expression imaginaire, puisque P et S sont positifs ; donc la courbe ne rencontre pas l'axe des ordonnées. On voit même que tant que l'on prendra $Qt^2 < S$, ou $t < \sqrt{\frac{S}{Q}}$, soit positivement, soit négativement, l'ordonnée sera toujours imaginaire, et que la courbe ne commencera qu'aux points B et B' (fig. 27), pour lesquels on aura $t = \pm\sqrt{\frac{S}{Q}}$. A ces points, l'ordonnée

correspondante est nulle; et comme on a $u^2 = 0$, il s'ensuit que les droites bBb', $b''B'b'''$ menées parallèlement à l'axe des ordonnées par les points B, B', sont tangentes à la courbe; ainsi dans tout l'intervalle compris entre ces deux parallèles, il n'y a pas de courbe: mais si l'on prend une abscisse positive ou négative plus grande que AB, l'ordonnée sera réelle, et aura deux valeurs égales et de signe contraire; et comme rien ne limite la grandeur de l'abscisse, ni par conséquent celle de l'ordonnée, il s'ensuit que la courbe s'étend à l'infini en s'écartant de l'axe des abscisses, tant en dessus qu'en dessous.

Donc enfin la courbe est composée de deux parties absolument séparées qui se présentent leur convexité, et chacune de ces parties est formée de deux branches qui s'étendent l'une et l'autre à l'infini.

On voit qu'il n'y a jamais qu'un des diamètres conjugués qui puisse rencontrer l'*hyperbole*.

76. Il est extrêmement facile de s'assurer que l'hyperbole jouit aussi de la propriété que nous avons reconnue pour l'ellipse (n° 53); ainsi les deux théorèmes auxquels elle conduit auront lieu également, savoir :

1°. *Si par un même point de l'hyperbole on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués, la droite qui joindra les extrémités de ces cordes sera un diamètre.*

2°. *Si par les extrémités d'un diamètre on mène deux cordes à un même point de la circonférence de l'hyperbole, les droites menées par le centre parallèlement à ces cordes, seront des diamètres conjugués.*

77. La moitié du diamètre qui rencontre la courbe est $\sqrt{\frac{S}{Q}}$, que nous représenterons par m, et faisant par analogie $\sqrt{\frac{S}{P}} = n$, on aura

$$Q = \frac{S}{m^2}, \quad P = \frac{S}{n^2},$$

et pour l'équation de la courbe

$$m^2u^2 - n^2t^2 = -m^2n^2,$$

qui ne diffère de celle de l'ellipse que parce que n^2 est pris négativement.

Les relations entre P et Q deviennent, en y faisant Q négatif,

$$4PQ = G\sin^2\psi, \quad P - Q = (A + C)\sin^2\psi;$$

d'où l'on tire, comme au n° 54,

$$4mn\sin\psi = \frac{8S}{\sqrt{G}}, \quad 4m^2 - 4n^2 = \frac{16(A+C)S}{G}.$$

Ainsi, en regardant $2n$ comme la longueur du diamètre conjugué au diamètre $2m$, on aura ces deux propositions analogues à celles que nous avons trouvées pour l'ellipse.

1°. *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est constante.*

2°. *La différence des quarrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante.*

78. Si l'angle ψ est droit, les diamètres conjugués prennent le nom d'*axes principaux*. Celui des deux qui rencontre l'hyperbole s'appelle *premier axe*, et l'autre second axe. Les points B, B' (fig. 28) où le premier axe rencontre la courbe sont les *sommets*.

Il est évident que chacun des axes principaux divise la courbe en deux parties parfaitement égales.

On peut voir, comme pour l'ellipse, que ces deux axes sont généralement inégaux, car, en les désignant par a et b, ils sont donnés par les équations

$$ab = \frac{2S}{\sqrt{G}}, \quad a^2 - b^2 = \frac{4(A+C)S}{G},$$

et si l'on y suppose $a = b$,

$$a^2 = \frac{2S}{\sqrt{G}}, \quad 0 = \frac{4(A+C)S}{G};$$

et comme S ne peut être égale à zéro, la seconde équation exige qu'on ait $A + C = 0$, ou $A = -C$.

L'équation de l'hyperbole rapportée aux axes principaux, en prenant le premier pour axe des abscisses, et le second pour axe des ordonnées, est donc

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Mais nous venons de voir que les axes étaient égaux quand on a dans l'équation générale $A + C = 0$, l'équation précédente devient, dans ce cas,

$$y^2 - x^2 = -a^2,$$

et appartient à une espèce particulière d'hyperbole, nommée *hyperbole équilatère*. Cette courbe tient parmi les hyperboles le rang que le cercle tient parmi les ellipses.

Si l'on fait $A + C = 0$ dans les équations du n° 76, on trouve $m^2 = n^2$, et partant $m = n$; ainsi *pour l'hyperbole équilatère, dans un même système, les diamètres conjugués sont égaux*. Mais ici on n'a pas $\sin \nu = 1$, ni par conséquent $m = a$.

79. L'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

donne

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

d'où l'on déduit facilement, comme pour l'ellipse, que *les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des segmens correspondans du premier axe*. Mais cette proposition n'a plus lieu pour le second axe.

En mettant l'équation précédente sous la forme

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2},$$

on peut encore, comme nous l'avons fait observer pour l'ellipse, dire que *le rapport du quarré de l'ordonnée au produit des segmens correspondans est constant, et égal au rapport des quarrés des axes.*

Pour l'hyperbole équilatère, ce rapport est l'unité; donc *la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence sur le premier axe est*, comme pour le cercle, *moyenne proportionnelle, entre les distances du pied de la perpendiculaire aux extrémités de l'axe.*

On reconnaîtrait de même que, *si l'on construit sur le même premier axe une hyperbole ordinaire et une hyperbole équilatère, les ordonnées de la première sont aux ordonnées de la seconde comme le second axe est au premier.*

Cette propriété fournirait pour la description de l'hyperbole ordinaire les mêmes ressources que son analogue a fournies pour l'ellipse, si l'on pouvait décrire l'hyperbole équilatère aussi facilement que le cercle.

80. Pour passer de l'équation aux axes principaux à l'équation aux diamètres conjugués et réciproquement, on aura les relations

$$m^2-n^2=a^2-b^2, \quad mn\sin\nu=ab,$$
$$\operatorname{tang}\nu=\operatorname{tang}(\beta-\alpha), \quad a^2\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta-b^2=0,$$

que l'on obtiendra directement de la même manière que celles du n° 60, ou que l'on pourrait déduire de celles-là, en changeant b^2 en $-b^2$ et n^2 en $-n^2$, puisque c'est la seule différence qu'il y ait entre les équations de l'ellipse et de l'hyperbole.

On aurait aussi

$$m^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha - b^2\cos^2\alpha},$$

$$n^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}.$$

Nous ne nous occuperons pas des problèmes qui peuvent se présenter à résoudre, parce qu'ils n'offriront aucune difficulté après ce qui a été dit pour l'ellipse sur le même sujet. Nous observerons seulement que les diamètres conjugués ne peuvent être égaux que dans l'hyperbole équilatère, puisque la supposition $m^2 = n^2$ exige qu'on ait $a^2 = b^2$.

Dans ce cas, la quatrième équation donne

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = 1, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha};$$

d'où l'on peut conclure que les angles α et β, pris ensemble, font un angle droit; mais comme les tangentes sont de même signe, il ne s'ensuit pas que les diamètres se coupent à angle droit. L'angle que fait un des diamètres avec le premier axe est donc égal à celui que son conjugué fait avec le second axe; et partant, *la droite qui coupe en deux parties égales l'angle des axes principaux, coupe aussi en deux parties égales l'angle de deux diamètres conjugués quelconques.*

81. Puisque la tangente est parallèle au conjugué du diamètre qui passe par le point de contact, on pourra aussi mener une tangente à un point donné de l'hyperbole par la même construction que pour l'ellipse, si l'on suppose la courbe décrite: mais la même propriété conduit aussi à l'équation de la tangente; on y parvient en appliquant à l'hyperbole les raisonnemens du n° 62, ou, plus simplement, en remplaçant b^2 par $-b^2$ dans l'équation de la tangente à l'ellipse.

La tangente à un point de l'hyperbole dont les coordonnées

sont x' et y' aura donc pour équation

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x'),$$

ou

$$a^2 yy' - b^2 xx' = -a^2 b^2.$$

Si l'on suppose $y = 0$, on trouve, en désignant par x'' la valeur qui résulte pour x,

$$x'' = \frac{a^2}{x'},$$

distance du centre au point où la tangente rencontre le premier axe. Cette expression est facile à construire, quoique le procédé ne puisse être le même que pour l'ellipse, parce qu'ici $x' > a$. Mais si M (fig. 29) est le point donné, du centre A avec la moitié du premier axe comme rayon, on décrira une circonférence; sur l'abscisse AP comme diamètre, on décrira une seconde circonférence qui coupera la première en deux points N, N'; on joindra NN', et le point T où cette droite rencontre le premier axe est le point cherché, comme il est facile de le démontrer.

La valeur de x'' étant indépendante de b, on voit que si l'on imagine une suite d'hyperboles construites sur le même premier axe, les tangentes menées à ces différentes courbes, par des points correspondans à la même abscisse, viendront rencontrer l'axe au même point. On aurait donc, pour mener une tangente à l'hyperbole, une méthode analogue à celle que nous avons donnée pour l'ellipse (n° 63), sans la difficulté que nous avons déjà reconnue en pareille occasion (n° 79).

On trouvera pour la soutangente

$$PT = x'' - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'},$$

qui sera négative quand x' est positive.

Au reste, pour l'hyperbole équilatère, l'équation de la tan-

gente devient

$$y - y' = \frac{x'}{y'}(x - x'),$$

ou

$$yy' - xx' = -a^2.$$

82. La valeur de $AT = x'' = \frac{a^2}{x'}$ étant toujours comprise entre o et a fait voir que le pied T de la tangente est toujours situé entre le centre A et les sommets B, B'; plus la valeur de l'abscisse x' augmentera, plus le point T se rapprochera du centre, sans jamais pouvoir se confondre avec lui, à moins que l'on ne suppose x' infini; ainsi la tangente qui passe par le centre ne rencontre la courbe qu'à l'infini. D'ailleurs l'angle que fait la tangente avec le premier axe, a pour tangente trigonométrique

$$\frac{b^2x'}{a^2y'} = \pm\frac{b}{a}\frac{x'}{\sqrt{(x'^2-a^2)}} = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x'^2}\right)}}$$

qui se réduit à $\pm\frac{b}{a}$, quand x' est infinie. Ainsi il y a deux droites SAS', $S''AS$ (fig. 30) qui jouissent de cette propriété, et leur équation est

$$y = \pm\frac{b}{a}x;$$

il est facile de reconnaître dans ces deux droites, celles que nous avons nommées *asymptotes* (chap. I, n°s 34 et suiv.); et d'ailleurs si l'on applique directement à l'hyperbole mise sous la forme

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = o,$$

la transformation du n° 34, on aura

$$\left(\frac{ay}{bx}\right)^2 - 1 + \frac{a^2}{x^2} = o,$$

qui approche d'autant plus de se réduire à

$$\left(\frac{ay}{bx}\right)^2 - 1 = 0$$

que l'abscisse x est plus grande ; or cette équation donne

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

équation des asymptotes, et qui est identique avec celles des tangentes qui passent par le centre.

Cette équation fait voir évidemment que les asymptotes sont parallèles aux lignes $B'C$, BC qui joignent les extrémités du premier axe à celle du second, ou qu'elles sont les diagonales du rectangle construit sur les axes. On voit aussi que, pour l'hyperbole équilatère, les asymptotes font aveo le premier axe un angle de 50° (nouv. div.), puisque $\frac{b}{a} = 1$, et par conséquent qu'elles sont perpendiculaires entre elles. Nous reviendrons bientôt à ces lignes remarquables qui jouissent de plusieurs propriétés importantes, ne voulant pas interrompre l'ordre de nos recherches.

83. Tout ce qui a été exposé à l'égard de l'ellipse sur la manière de parvenir directement à l'équation de la tangente, et sur le cas où la tangente doit passer par un point donné hors de la courbe, aura également lieu pour l'hyperbole, en changeant b^2 en $-b^2$, et n^2 en $-n^2$. Il faut seulement faire attention que la comparaison qui a été faite (n° 65 1°) de l'ellipse aux cercles décrits sur le grand axe et sur le petit axe, devrait etre faite de l'hyperbole ordinaire aux hyperboles équilatères construites sur les deux axes; ainsi on rencontrerait encore la difficulté de tracer l'hyperbole équilatère.

Mais on se convaincra aisément que si p est $< a$, la distance $\frac{a^2}{p}$ pourra être regardée comme la distance du centre au

pied de la tangente, pour un cercle décrit sur le premier axe ; ainsi si l'on décrit ce cercle, et qu'au point où l'ordonnée q ou son prolongement rencontre sa circonférence, on mène une tangente, cette tangente rencontrera le grand axe au point cherché. Si au contraire p est plus grand que a, $\frac{a^2}{p}$ pourra être considérée comme la distance du centre au pied de la tangente menée au point de l'hyperbole qui correspond à l'abscisse p. Ainsi, en menant cette tangente, son pied sera précisément le point cherché.

Pour le point de rencontre avec le second axe, la distance est $\frac{-b^2}{q}$; et comme q peut toujours être l'ordonnée d'un certain point de l'hyperbole, en menant une tangente à ce point, la distance du centre au point où elle rencontrera le second axe sera précisément $-\frac{b^2}{q}$; ainsi l'on aura le second point cherché, et la corde qui joint les points de contact sera déterminée.

Quant au théorème que nous avons déduit de la seconde remarque, il a lieu pour l'hyperbole absolument de la même manière et d'après les mêmes considérations.

Si l'on cherche, en imitant ce qui a été fait (n° 66), à déterminer si la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers les axes, on trouvera sans peine que chaque partie tourne sa concavité au premier axe, et sa convexité au second.

84. En exprimant que la normale passe par le point de contact et qu'elle est perpendiculaire à la tangente, on trouvera pour son équation

$$y - y' = -\frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'),$$

ou, réduction faite,

$$a^2y'x + b^2x'y = (a^2 + b^2)x'y';$$

en y faisant $y = 0$, on a

$$x'' = \frac{(a^2 + b^2)\,x'}{a^2}$$

pour l'abscisse du point où la normale rencontre le premier axe.

Cette valeur se simplifie beaucoup pour l'hyperbole équilatère, car elle devient $x'' = 2x'$, ce qui donne un moyen bien simple de mener une normale, et par conséquent une tangente à un point donné de l'hyperbole équilatère. Il est encore aisé de conclure que la normale est égale au diamètre qui passe par le point de contact.

La sounormale est en général (fig. 31)

$$PN = x'' - x' = \frac{b^2}{a^2}\,x',$$

et pour l'hyperbole équilatère, $PN = x'$, qui ne diffère que par le signe de celle du cercle.

85. Quant à la recherche du cercle *osculateur* et du rayon de courbure, comme il suffirait de changer dans les calculs b^2 en $-b^2$, nous nous contenterons de faire ce changement dans le résultat, et nous aurons, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur,

$$q = -\frac{c^2 y'^3}{b^4}, \quad p = \frac{c^2 x'^3}{a^4},$$

et pour le rayon de courbure,

$$r = \frac{(c^2 x'^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

expressions dans lesquelles on a $c^2 = a^2 + b^2$.

Comme l'abscisse x' peut croître indéfiniment, on voit que le rayon de courbure croît en même temps, que par conséquent la courbure diminue à mesure que l'on s'éloigne du sommet, et que l'hyperbole tend à dégénérer en ligne droite.

En éliminant x' et y' de l'équation $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$, à l'aide des valeurs de p et de q, on trouvera la courbe des centres qui sera la *développée* de l'hyperbole, et dont cette dernière sera la *développante*.

86. Nous avons vu (n°s 36 et 49) que l'équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes, était de la forme

$$ut = M;$$

et si l'on compare l'équation générale à l'équation aux axes principaux

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2,$$

on trouvera que l'équation

$$ut = \pm\frac{\Delta}{G^2}\sqrt{\{B^2 + (A - C)^2\}}$$

se réduit à

$$ut = \pm\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Mais sans recourir à ce qui précède, et sans supposer sur les asymptotes d'autres notions que celles que nous avons acquises n° 82, nous pouvons trouver l'équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes. En effet, si nous prenons pour axe des abscisses l'asymptote $S''AS'$ (fig. 30), et l'autre pour axe des ordonnées, on passera de l'équation aux axes à celle que l'on cherche, en faisant dans la première,

$$x = t\cos\alpha + u\cos\beta,$$
$$y = t\sin\alpha + u\sin\beta:$$

or on a $\text{tang}\,\alpha = -\frac{b}{a}$, $\text{tang}\,\beta = \frac{b}{a}$; donc

$$\sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$
$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\quad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

ce qui change les valeurs de x et de y en

$$x = \frac{a(u+t)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \quad y = \frac{b(u-t)}{\sqrt{(a^2+b^2)}};$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

donnent

$$a^2b^2(\overline{u-t}^2 - \overline{u+t}^2) = -a^2b^2(a^2+b^2),$$

ou, réduction faite,

$$4ut = a^2 + b^2,$$

nous aurions trouvé

$$4ut = -a^2 - b^2,$$

si nous eussions regardé cos α comme négatif, et sin α comme positif; on expliquera facilement ce changement de signe, en observant qu'alors l'angle α étant l'angle BAS'', au lieu de l'angle négatif BAS', les abscisses positives auraient dû être portées de A vers S'', au lieu de l'être de A vers S'. Ainsi nous ne considérerons que la première de ces deux équations.

En faisant $\frac{a^2+b^2}{4} = h^2$, elle devient

$$ut = h^2 :$$

il est aisé de voir qu'au sommet on a $u = t$; cette vérité résulte, ou de l'inspection de la figure, ou de la relation

$$y = \frac{b(u-t)}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

qui donne $u - t = 0$ quand on a $y = 0$. Il en résulte $u = t = h$.

87. L'aire du parallélogramme construit sur une abscisse quelconque t et l'ordonnée correspondante u a pour expression

$$ut \sin SAS'' :$$

or $\sin SAS'' = \sin 2SAB = 2\sin SAB \cos SAB = 2\sin\beta\cos\beta$; donc

$$\sin SAS'' = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

D'ailleurs par l'équation on a

$$ut = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

donc

$$ut \sin SAS'' = \frac{ab}{2}.$$

Ainsi l'aire du parallélogramme $APMM'$ est constante, et égale à la moitié du rectangle construit sur les demi-axes.

Sans calculer sin SAS'', on voit que l'expression ut sin SAS'' est constante, ce qui suffit pour démontrer la première partie de la proposition : or il est aisé de se convaincre que le lozange $AmBm'$ a la moitié du premier axe pour une de ses diagonales, et la moitié du second axe pour l'autre, et comme ces diagonales sont perpendiculaires entre elles, l'aire de ce lozange est $\frac{ab}{2}$.

88. En désignant l'angle SAS'' par Ψ', nous avons trouvé dans le n° précédent,

$$\sin. \Psi' = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

on a d'ailleurs

$$h^2 = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

on en déduit

$$h^2 \sin \Psi' = \frac{ab}{2},$$

et partant

$$a^2 + b^2 = 4h^2, \quad ab = 2h^2 \sin \Psi';$$

équations qui feront connaître les axes quand on aura l'équation aux asymptotes, et l'angle que ces lignes font entre elles. Quant à la direction des axes, elle est déterminée, puisque le premier axe coupe en deux parties égales l'angle des asymptotes. Ainsi l'équation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes étant donnée, on pourra en déduire sur-le-champ l'équation

aux axes principaux, puisque les équations précédentes donnent

$$(a-b)^2 = 4h^2(1-\sin\Psi') = 8h^2\sin^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\Psi'\right),$$

$$(a+b)^2 = 4h^2(1+\sin\Psi') = 8h^2\cos^2\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\Psi'\right),$$

Mais on obtiendrait un résultat bien plus simple, en observant qu'on a

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\frac{\Psi'}{2} = \frac{b}{a};$$

d'où

$$b = a\operatorname{tang}\frac{\Psi'}{2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $a^2+b^2=4h^2$, il vient

$$\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{\Psi'}{2}\right)a^2 = 4h^2;$$

d'où

$$a = \frac{2h}{\operatorname{séc}\frac{\Psi'}{2}} = 2h\cos\frac{\Psi'}{2},$$

et partant,

$$b = 2h\sin\frac{\Psi'}{2};$$

ce qu'on aurait trouvé d'ailleurs, en considérant que le triangle ABb est rectangle, et que ses trois côtés sont a, b, et $2h$. La construction est trop évidente pour que nous nous y arrêtions.

89. Si l'on cherche l'équation de la tangente rapportée aux asymptotes, elle devra être de la forme

$$u-u' = A(t-t');$$

en faisant $u - u' = U$, $t - t' = T$, on en tire $u = U + u'$, $t = T + t'$; substituant ces valeurs dans l'équation

$$ut = h^2,$$

elle devient

$$UT + t'U + u'T + u't' = h^2,$$

ou, comme $u't' = h^2$,

$$UT + t'U + u'T = 0 :$$

or on a $U = AT$, et par conséquent, en substituant cette valeur de U,

$$AT^2 + (At' + u')\,T = 0.$$

Pour que la droite soit tangente, c'est-à-dire, pour que les deux valeurs de T soient nulles, on doit avoir

$$At' + u' = 0, \quad \text{ou} \quad A = -\frac{u'}{t'};$$

ainsi l'équation de la tangente est

$$u - u' = -\frac{u'}{t'}(t - t'),$$

et, réduction faite,

$$ut' + u't = 2u't' = 2h^2.$$

Si l'on fait $u = 0$, on trouve $t = 2t'$; donc la distance AT (fig. 32) du centre au point où la tangente rencontre l'asymptote AS'', est double de l'abscisse AP. On verrait de même que AT' est double de l'ordonnée MP.

La soutangente PT' est par conséquent égale à l'abscisse.

Cette propriété fournit évidemment un moyen facile de mener une tangente à un point donné de l'hyperbole, lorsque les asymptotes sont données.

Elle prouve encore que *la tangente* TT' *est coupée en deux parties égales au point de contact.*

D'ailleurs 1° si l'on mène une droite quelconque parallèle à la tangente, qui rencontre l'hyperbole aux points μ, μ', et les asymptotes aux points ν, ν', le diamètre AM, mené au point de contact, doit couper en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la tangente; ainsi il coupe $\mu\mu'$ en deux parties égales: mais comme il passe par le milieu de la tangente, il coupera aussi la droite $\nu\nu'$ en deux parties égales; donc on a nécessairement $\mu\nu = \mu'\nu'$; et comme une droite quelconque étant donnée, on peut toujours concevoir une tangente qui lui soit parallèle, on doit conclure en général que :

Si une droite quelconque coupe l'hyperbole et ses asymptotes, les parties de cette droite comprises entre les asymptotes et la courbe, sont égales entre elles.

Cette seconde propriété fournit un moyen extrêmement simple de construire une hyperbole, lorsque l'on connaît les asymptotes et un de ses points. Par le point donné, on mènera à volonté tant de droites qu'on voudra; et prenant les distances du point donné au point où l'une de ces droites rencontre une des asymptotes, on la portera sur la même droite, en partant du point où elle rencontre l'autre asymptote; on aura un second point de la courbe; opérant de même sur chacune des droites, on déterminera autant de points que l'on voudra. On peut rendre l'exécution plus simple, en ne menant pas par le point donné toutes les droites dont on se sert, et employant à la construction quelques-uns de ceux que l'on vient de trouver.

2°. On voit encore que l'aire du triangle que déterminent la tangente et les asymptotes, a pour expression $\frac{4u't' \sin \psi'}{2} = ab$; donc *l'aire du triangle formé par les asymptotes et la tangente, est égale à l'aire du rectangle formé sur les demi-axes.*

Or si l'on fait le demi-diamètre $AM = m$, la demi-tangente $MT' = T$, l'angle que ces deux lignes font entre elles est le même que celui des diamètres conjugués, que nous désignerons par ψ. Le triangle formé par le demi-diamètre et la demi-tangente est moitié du triangle précédent, et son aire

est exprimée par $\frac{mT\sin\nu}{2}$; on a donc

$$mT\sin\nu = ab;$$

et partant (n° 60), T est la moitié du conjugué du diamètre qui passe par le point de contact. Donc : *étant donné un diamètre qui rencontre la courbe, on trouvera la longueur de son conjugué, en menant une tangente à l'une des extrémités de ce diamètre, et prenant la partie de la tangente interceptée par les asymptotes.*

90. Si au lieu de prendre pour axes les deux asymptotes, on n'en prenait qu'une, par exemple, l'asymptote $S''AS''$ pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées une ligne AU (fig. 33), qui fît avec le premier axe principal un angle β, les formules à substituer seraient

$$x = \frac{at}{\sqrt{(a^2+b^2)}} + u\cos\beta,$$

$$y = \frac{-bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}} + u\sin\beta,$$

et l'on trouverait, calcul fait, en observant que $a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta = (a\sin\beta + b\sin\beta)(a\sin\beta - b\cos\beta)$, l'équation

$$u^2 - \frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot\frac{1}{a\sin\beta - b\cos\beta}\,ut + \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta} = 0.$$

D'ailleurs, l'autre asymptote SAS' aurait pour équation, en faisant les mêmes substitutions dans l'équation $y = \frac{b}{a}x$,

$$u = \frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\cdot\frac{1}{a\sin\beta - b\cos\beta}\,t :$$

or dans l'équation de l'hyperbole, le coefficient du second terme pour une même abscisse T, est la somme des ordon-

nées correspondantes prise avec un signe contraire ; donc en désignant ces coordonnées par u_1, u_2, on a

$$u_1 + u_2 = \frac{2ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \frac{1}{a\sin\beta - b\cos\beta} T,$$

ou, si U est l'ordonnée de l'asymptote SAS' correspondante à la même abscisse,

$$u_1 + u_2 = U,$$

ce qui fait retomber sur la proposition démontrée au n° précédent 1°, car on en tire $u_1 = U - u_2$, et u_1 et $U - u_2$ sont évidemment les parties de U comprises entre les asymptotes et la courbe. Donc si la droite est tangente, comme on a pour lors $u_1 = u_2$, le point de contact est au milieu.

On sait encore que le dernier terme d'une équation du second degré est égal au produit des deux racines ; on a donc

$$u_1 u_2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta};$$

or le second membre de cette équation est (n° 80) le quarré du demi-diamètre qui fait avec le premier axe un angle β ; ainsi comme on a $u_2 = U - u_1$, *si l'on mène deux droites parallèles qui coupent l'hyperbole et ses asymptotes, les deux parties de l'une interceptées par le même point de la courbe, sont réciproquement proportionnelles aux deux parties analogues de l'autre, et le demi-diamètre est moyen proportionnel entre les deux parties d'une même droite.*

La seconde proposition du n° précédent est encore une conséquence de ce résultat ; car si la droite est tangente, nous venons de voir qu'elle était coupée en deux parties égales au point de contact ; donc le demi-diamètre est alors égal à la moitié de cette droite, en se rappelant ce que l'on doit entendre par la valeur d'un diamètre imaginaire.

91. Par la substitution du n° 70, on trouve pour l'équation

polaire générale de l'hyperbole

$$\left.\begin{array}{lll} a^2\sin^2\varphi & z^2+2a^2q\sin\varphi & z+a^2q^2 \\ -b^2\cos^2\varphi & -2b^2p\cos\varphi & -b^2p^2 \\ & & +a^2b^2 \end{array}\right\}=0,$$

qu'on déduirait aussi de celle de l'ellipse, en changeant b^2 en $-b^2$.

Cette équation est susceptible des mêmes simplifications; mais nous ne nous arrêterons qu'à la dernière, les autres ne conduisant à aucun résultat qui mérite d'être remarqué.

Si l'on suppose $q=0$, et que l'on prenne $p^2=a^2+b^2=c^2$, on trouvera comme au n° cité, p étant $=+c$,

$$az=\pm(cz\cos\varphi+b^2),$$

d'où l'on tire, à cause du double signe, les deux racines

$$z=\frac{b^2}{a-c\cos\varphi},\quad z=\frac{-b^2}{a+c\cos\varphi}.$$

La première est toujours positive, quand $\cos\varphi$ est négatif; mais si $\cos\varphi$ est positif, elle est positive tant que $\cos\varphi<\frac{a}{c}$; elle est infinie quand $\cos\varphi=\frac{a}{c}$, et elle est négative quand $\cos\varphi>\frac{a}{c}$: la seconde, toujours négative quand $\cos\varphi$ est positif, ne devient positive que lorsque $\cos\varphi$ est négatif et $>\frac{a}{c}$; mais, dans ce cas, elle est évidemment plus grande que la première pour une même valeur de φ.

Quand, dans la première, on suppose $\cos\varphi$ négatif ou l'angle φ obtus, la plus petite valeur de z aura lieu pour l'hypothèse $\cos\varphi=-1$, et l'on aura alors $z=\frac{b^2}{a+c}$, ou, comme $b^2=c^2-a^2$, $z=c-a$, valeur qui appartient au sommet B (fig. 34) : les rayons vont en augmentant jusqu'à ce qu'on

ait $\cos\varphi = 0$, hypothèse qui donne $z = \frac{b^2}{a}$; ainsi les points donnés par les valeurs de z correspondantes aux valeurs de $\cos\varphi$ comprises depuis -1 jusqu'à 0, sont sur l'arc BQ que détermine la droite FQ menée par le pôle perpendiculairement à l'axe.

Quand on suppose $\cos\varphi$ positif, la valeur de z continue à augmenter positivement à mesure que $\cos\varphi$ augmente, c'est-à-dire à mesure que l'angle φ diminue, jusqu'à ce qu'on ait $\cos\varphi = \frac{a}{c}$, hypothèse qui rend z infini. On voit qu'en effet $\frac{a}{c}$ étant $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, le rayon variable est alors parallèle à l'asymptote AS; ainsi les valeurs de $\cos\varphi$ comprises entre 0 et $\frac{a}{c}$, donnent la partie Qq de la courbe. Si l'on prend $\cos\varphi > \frac{a}{c}$, le rayon variable devient négatif, c'est-à-dire, qu'il doit être porté sur sa direction dans un sens opposé; ainsi les points qui en résulteront doivent être au-dessous de l'axe. Mais comme on peut prendre $\cos\varphi$ tel qu'il ne surpasse $\frac{a}{c}$ que d'une quantité aussi petite que l'on voudra, z pourra être plus grand que toute quantité donnée, et sa plus petite valeur, qui a lieu lorsque $\cos\varphi = 1$, est $\frac{b^2}{a-c} = -(a+c)$: donc ces points ne peuvent appartenir qu'à la branche inférieure $B'q'$, et la donneront toute entière.

Donc enfin la racine

$$z = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}$$

donne la branche supérieure de la partie sitnée du côté du pôle et la branche inférieure de l'autre partie; et par conséquent la seconde racine donne les deux autres branches, ce que l'on reconnaîtrait au reste de la même manière.

Si l'on prend $p = -c$, les valeurs de z deviennent

$$z' = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi'}, \quad z' = \frac{-b^2}{a - c\cos\varphi'}.$$

Il est évident que, de même, l'une de ces valeurs donnera la branche supérieure de l'une des parties, et la branche inférieure de l'autre ; ainsi, pour assigner d'une manière précise les branches données par chacune d'elles, il suffira de reconnaître la position de quelques points, et même d'un seul.

Or si l'on fait $\cos\varphi = 0$, la première donne $z = \frac{b^2}{a}$; donc cette valeur donne la partie $B'q''$ et la partie Bq'', et partant la seconde donne la partie Bq et la partie $B'q'$.

Il suit de cette discussion que les valeurs qui donnent les mêmes points, ne sont pas celles qui se correspondent naturellement par le changement du signe de c : de sorte que pour avoir celles qui donnent les mêmes points, on prendra les deux valeurs qui résultent d'une même hypothèse sur c, et l'on changera le signe de c dans l'une des deux.

Comme tout ce qui se passe pour deux des branches a également lieu pour les deux autres, nous considérerons seulement les équations

$$z = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}, \qquad z' = \frac{-b^2}{a - c\cos\varphi'}.$$

Pour exprimer que les rayons variables z, z' appartiennent au même point, on anra la relation

$$z'\cos\varphi' - z\cos\varphi = 2c,$$

comme au n° 70; mais les équations précédentes donnent

$$az - cz\cos\varphi = b^2,$$
$$az' - cz'\cos\varphi' = -b^2;$$

d'où l'on tire

$$a(z' - z) - c(z'\cos\varphi' - z\cos\varphi) = -2b^2,$$

ou, substituant $2c$ à la place de $z' \cos\varphi' - z\cos\varphi$, et divisant par a,

$$z' - z = \frac{2(c^2 - b^2)}{a} = 2a.$$

Donc *la différence des rayons variables menés à un même point quelconque de l'hyperbole, par les deux pôles situés sur le premier axe, de côté et d'autre à une distance* $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ *du centre, est constante et égale au premier axe.*

Ces deux pôles F, F' se nomment *foyers* de l'hyperbole, les lignes FM, $F'M$, etc. les *rayons vecteurs*. On déterminera géométriquement les foyers, en décrivant du centre, avec un rayon égal à la distance BC des extrémités des axes, une circonférence qui coupera le premier axe aux points F et F'.

Si l'on veut avoir les rayons vecteurs en fonction de l'abscisse, comme on a $z\cos\varphi = x - p = x - c$, l'équation

$$az - cz\cos\varphi = b^2,$$

donne

$$az = cx - c^2 + b^2 = cx - a^2,$$

et partant,

$$z = \frac{cx}{a} - a$$

pour le foyer positif.

L'équation

$$az' - cz'\cos\varphi' = -b^2,$$

donne de même, à cause de $z'\cos\varphi' = x + c$,

$$z' = \frac{cx}{a} + a$$

pour le foyer négatif.

Nous avons trouvé qu'en faisant $\cos\varphi = 0$, on avait $z = \frac{b^2}{a}$ ou $-\frac{b^2}{a}$; c'est encore, comme dans l'ellipse, l'ordonnée qui

passe par le foyer, et dont le double se nomme aussi *paramètre*.

92. Il résulte de la propriété des foyers un moyen de construire l'hyperbole par points. En effet, si de l'un des foyers, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence; qu'ensuite, diminuant ce rayon de tout le premier axe, on décrive de l'autre foyer une seconde circonférence, elle coupera la première en deux points qui appartiendront à l'hyperbole. On voit, comme au n° 71, que les deux mêmes ouvertures de compas peuvent servir à déterminer quatre points.

Cette propriété fournit également un moyen de décrire l'hyperbole par un mouvement continu. Si l'on fixe l'extrémité d'une règle à l'un des foyers, de manière cependant qu'elle tourne librement autour de ce point, et que l'on joigne l'autre extrémité au second foyer par un fil, dont la longueur surpasse celle de la règle de tout le premier axe; lorsque le fil sera tendu, l'extrémité mobile de la règle marquera un point de l'hyperbole; et si ensuite, glissant un stile contre la règle, on force en même temps le fil à s'appliquer contre la règle, et cette dernière à tourner autour du foyer, le stile décrira un arc d'hyperbole qui se terminera au sommet : car la règle et le fil diminuant en même temps de la même quantité, leur différence est toujours égale au premier axe.

93. Nous ayons vu (n° 84) que la normale rencontre le premier axe en un point dont l'abscisse est

$$x'' = AN = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x' = \frac{c^2 x'}{a^2}.$$

En opérant et raisonnant comme pour l'ellipse (n° 72), on trouvera que la normale MN (fig. 35) coupe en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur FM et le prolongement de l'autre rayon vecteur $F'M$; d'où il suit que la tangente coupe en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs. On aurait prouvé directement cette conséquence, en calculant les distances FT, $F'T$.

Donc, comme dans l'ellipse, *les angles formés par la tangente et les deux rayons vecteurs sont égaux entre eux ;* mais ils sont situés différemment.

Au reste on démontrera aussi cette proposition par un calcul analogue à celui que nous avons indiqué pour l'ellipse : on sera conduit au même résultat.

94. A l'aide de cette proposition on mènera facilement une tangente à l'hyperbole, par un point donné, soit sur la courbe, soit au dehors.

1°. Soit le point M (fig. 56) donné sur la courbe; on mènera les rayons vecteurs FM, $F'M$, sur le plus grand $F'M$, et de M en F'; on prendra $Mf' = MF$, on joindra Ff', et la perpendiculaire abaissée du point M sur la droite Ff', sera la tangente cherchée.

2°. Soit le point N donné hors de la courbe; le problème serait résolu, si l'on connaissait la direction de la droite Ff' : or cette droite passe déjà par le point F; et quant au point f', sa distance au point F' est évidemment égale au premier axe, sa distance au point N est égale à NF : d'où l'on conclura facilement la construction.

95. Un corps élastique ou un rayon luminenx ou calorifiqué, partant de l'un des foyers, sera donc réfléchi suivant une direction qui passe par l'autre foyer ; mais, comme il ne peut traverser la courbe, la réflexion aura lieu dans la partie de la courbe où se trouve le premier foyer. D'où il suit que si l'un des foyers est le centre d'un faisceau de rayons lumineux ou calorifiques, tous ceux qui iront frapper la circonférence de l'hyperbole se réfléchiront dans une direction, qui sera la même que s'ils partaient de l'autre foyer, et qu'ils pussent traverser la courbe.

§ II.

Des courbes privées de centre, ou du genre des paraboles.

96. Les courbes qui n'ont pas de centre sont données par l'équation

$$Pu^2 + Rt = 0,$$

à laquelle nous avons vu que l'équation générale peut se ramener quand on a $G = 0$. En faisant $\frac{R}{P} = 4m$, elle ne peut se présenter que sous l'une des formes

$$u^2 = 4mt, \quad u^2 = -4mt,$$

suivant que R, et partant m sera négatif ou positif. Or ces deux équations rentrent l'une dans l'autre, en remplaçant t par $-t$; donc elles donnent précisément la même courbe, mais dans une situation directement opposée. Nous ne considérerons par conséquent que la première.

On en tire

$$u = \pm 2\sqrt{mt};$$

quand on fait $t = 0$, on a $u = \pm 0$; donc la courbe passe par l'origine, et l'axe des ordonnées est tangent à la courbe; en faisant $t > 0$, l'ordonnée est réelle et augmente en même temps que l'abscisse, sans que rien limite leur accroissement; et comme la valeur de u est double, la courbe s'étend indéfiniment, tant au-dessus qu'au-dessous de l'axe des abscisses; mais du côté positif seulement, car en faisant $t < 0$, l'ordonnée devient imaginaire.

97. Nous avons vu (n° 47) qu'on avait

$$R = \frac{H}{2\sqrt{(A+C)A}}, \quad P = (A+C)\sin^2\psi;$$

il résulte de là

$$\frac{R}{P} = 4m = \frac{H}{2\sqrt{A(A+C)^3}} \cdot \frac{1}{\sin^2\Psi};$$

et partant

$$4m\sin^2\Psi = \frac{H}{2\sqrt{(A+C)^3 A}};$$

d'où il suit que le produit $m\sin^2\Psi$ est constant, quel que soit l'angle Ψ. Il suffit même de se souvenir que R est constant, et que $P = (A+C)\sin^2\Psi$, pour arriver à la conclusion précédente.

Quand l'angle Ψ est droit, le diamètre prend le nom d'*axe principal*. Nommant a la valeur qui en résulte pour m, et remplaçant t et u par x et y, on aura l'équation

$$y^2 = 4ax.$$

La forme de cette équation prouve que l'axe principal coupe la courbe en deux parties égales. Le point A (fig. 37) où il la rencontre se nomme *sommet*.

98. Si l'on suppose que l'on parte de l'équation de la parabole rapportée à son axe principal, pour passer à l'équation de cette courbe rapportée à un diamètre quelconque, on aura d'abord les relations

$$\sin\alpha = 0, \text{ d'où } \sin\Psi = \sin\beta \ldots \text{ (n}^{os}\text{ 47 et 48)};$$

ensuite

$$m\sin^2\beta = a \ldots \text{ (n° précéd.)} \ldots\ldots \text{ (1)}$$

D'ailleurs les équations

$$2Pq + D' = 0, \quad Pq^2 + Qp^2 + D'q + E'p + F = 0;$$

deviennent évidemment, à cause de $Q = 0$ et de $P = \sin^2\beta$, de $E' = 4a$ et de $D' = -4a\cos\beta$,

$$q\sin^2\beta - 2a\cos\beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (2)}$$
$$q^2\sin^2\beta - 4aq\cos\beta - 4ap = 0 \ldots\ldots\ldots \text{ (3)}.$$

Mais au lieu des deux dernières équations, on peut en trouver deux autres qui contiennent les coordonnées de l'extrémité du diamètre rapportées à l'axe principal et rectangulaires. En effet, si l'on nomme x' et y' ces coordonnées, on aura

$$x' = p\cos\alpha + q\cos\beta,$$
$$y' = p\sin\alpha + q\sin\beta;$$

et comme $\sin\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 1$,

$$x' = p + q\cos\beta, \quad y' = q\sin\beta :$$

les équations précédentes deviennent donc

$$y'\sin\beta - 2a\cos\beta = 0, \text{ ou } y'\operatorname{tang}\beta = 2a \ldots\ldots (4),$$
$$(q\sin\beta)^2 - 4a(p + q\cos\beta) = 0, \text{ ou } y'^2 - 4ax' = 0 \ldots\ldots (5).$$

La dernière est précisément l'équation de la courbe, et exprime que l'origine des coordonnées obliques est sur la parabole, comme on le savait déjà.

En combinant avec l'équation (1) les équations (2) et (3), ou les équations (4) et (5), on résoudra tous les problèmes que l'on peut se proposer sur le passage de l'axe à un diamètre quelconque, et réciproquement, ou sur la détermination de l'axe des ordonnées, pour un diamètre qui passe par un point donné. Nous ne nous arrêterons qu'aux problèmes suivans :

1°. *Trouver l'équation de la parabole rapportée à un diamètre qui passe par un point donné, quand on a l'équation de cette courbe rapportée à l'axe principal.* C'est-à-dire, étant donné, a, x', y', trouver β et m.

L'équation (4) donne sur-le-champ $\operatorname{tang}\beta = \frac{2a}{y'}$; et $\operatorname{tang}\beta$ étant connue, et par conséquent $\sin\beta$, l'équation (1) donne alors $m = \frac{a}{\sin^2\beta}$; l'équation (5) est satisfaite d'elle-même.

2°. *Étant donnée l'équation de la parabole rapportée à l'axe principal, et l'angle que doit faire un diamètre avec l'axe des* u *tangent à l'origine, trouver cette origine et l'équation de la*

courbe rapportée à ce diamètre. C'est-à-dire, étant donnés a et β, trouver x', y' et m.

L'équation (4) donne encore directement $y' = \frac{2a}{\text{tang}\,\beta}$, et alors l'équation (5) fera connaître x'. D'ailleurs l'équation (1) donne, comme dans le problème précédent, $m = \frac{2a}{\sin^2\beta}$.

3°. *Étant donnée l'équation de la courbe rapportée à un certain diamètre, et l'angle que fait avec lui l'axe des ordonnées tangent, trouver l'axe principal, c'est-à-dire le sommet et l'équation de la parabole rapportée à cet axe.* C'est-à-dire, étant donnés m et β, trouver a, p et q, ou a, x', y'.

L'équation (1) donne immédiatement $a = m\sin^2\beta$, et d'après cela les équations (2) et (3) feront connaître p et q, ou les deux équations (4) et (5) x', y'.

99. Si l'on suppose la courbe décrite, ces problèmes se résolvent géométriquement avec facilité. Nous observerons d'abord qu'en menant deux cordes parallèles quelconques, et joignant leurs milieux, on obtiendra un diamètre, et par conséquent la direction de tous les autres.

Cela posé : 1°. si l'on veut déterminer la direction de l'axe des ordonnées tangent, qui correspond à un point donné de la courbe, en supposant qu'on connaisse, comme on vient de le dire, la direction des diamètres ; par le point donné on mènera un diamètre, et tout se réduira alors à mener une corde qui soit coupée en deux parties égales par ce diamètre, problème de Géométrie extrêmement simple. L'axe des ordonnées sera parallèle à cette corde.

2°. Si l'on connaît l'angle que doit faire l'axe tangent avec le diamètre, c'est-à-dire avec l'axe principal, et que l'on cherche le point de la courbe que touche l'axe des ordonnées ; on mènera une corde quelconque, qui fasse avec l'axe principal l'angle donné, et par le milieu de cette corde, un diamètre

qui rencontrera la courbe au point cherché. L'axe tangent sera parallèle à la corde.

3°. Si l'on cherche à déterminer le sommet de la courbe, on mènera un diamètre quelconque, et élevant, par un point quelconque de ce diamètre, une corde qui lui soit perpendiculaire, la parallèle au diamètre, menée par le milieu de la corde, sera l'axe principal, et rencontrera par conséquent la courbe au sommet.

100. Le premier des trois problèmes que nous venons de résoudre, revient à mener une tangente par un point donné. La solution analytique du n° 98, conduit à l'équation de la tangente, car cette droite passant par le point donné, dont les coordonnées sont x', y', et faisant un angle dont la tangente est

$$\text{tang}\,\beta = \frac{2a}{y'},$$

son équation sera

$$y - y' = \frac{2a}{y'}(x - x'),$$

ou, réduction faite,

$$yy' = 2a(x + x'),$$

en observant que $y'^2 - 2ax' = 2ax'$.

Si l'on suppose $y = 0$, on trouve $x'' = -x'$; donc la distance AT (fig. 38) du sommet au pied de la tangente est égale à l'abscisse, mais de signe contraire; et partant, *la soutangente* PT *est double de l'abscisse.* Il en résulte un moyen évident de mener géométriquement la tangente à un point donné sur la courbe, sans supposer cette courbe décrite. Si l'on supposait au contraire $x = 0$, on trouverait $y'' = \frac{2ax'}{y'}$.

Nous ne nous arrêterons pas à chercher directement l'équation de la tangente; en imitant ce qui a été fait pour l'ellipse, on ne rencontrera aucune difficulté : nous observerons seu-

lement qu'elle est de même forme lorsque la courbe est rapportée à un diamètre.

101. Si le point par lequel on doit mener la tangente est situé hors de la courbe, en nommant p et q ses coordonnées, elles devront satisfaire à l'équation de la tangente; ainsi, x', y' étant toujours les coordonnées du point de contact, qui, dans ce cas, sont inconnues, on aura, pour les déterminer, les équations

$$qy' = 2a(p + x'),$$
$$y'^2 = 4ax'.$$

Comme l'élimination conduirait à une équation du second degré, il s'ensuit que par un même point, on peut mener deux tangentes à la parabole. D'ailleurs les deux points de contact se trouvent sur la droite dont l'équation est

$$qy' = 2a(p + x');$$

or cette droite rencontre l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est $-p$, et l'axe des ordonnées en un point dont l'ordonnée est $\frac{2ap}{q}$. Ainsi l'on déterminera le point où la ligne des contacts rencontre l'axe des x, en portant l'abscisse p en sens contraire. Quant au point où cette droite rencontre l'axe des y, comme son ordonnée est $\frac{2ap}{q}$, il est clair (n° précéd.) que si l'on trouve sur la parabole un point tel, que le rapport de l'abscisse à l'ordonnée soit égal à $\frac{p}{q}$, la tangente menée à ce point de la courbe rencontrera l'axe des y au point cherché. Or si l'on joint le point donné et le sommet de la parabole par une droite, elle rencontrera la courbe en un certain point, dont l'abscisse et l'ordonnée seront dans le même rapport que l'abscisse et l'ordonnée du point donné.

Mais on doit remarquer encore que l'abscisse du point de

rencontre avec l'axe des x, étant indépendante de l'ordonnée q, sera la même pour tous les points situés sur la perpendiculaire abaissée du point donné sur l'axe principal ; et comme en considérant l'équation de la parabole rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente qui passe par son extrémité, et l'équation de la tangente cherchée rapportée aux mêmes axes, on obtiendrait un résultat analogue, nous pouvons conclure qu'en général :

Si de tant de points qu'on voudra d'une droite quelconque, on mène deux tangentes à la parabole, et que l'on joigne par des cordes les points de contact relatifs à un même point, toutes ces cordes se couperont en un point unique situé sur le diamètre mené par le point où une tangente parallèle à la droite donnée rencontrerait la courbe.

Et réciproquement, etc.

De plus, l'ordonnée $\frac{2ap}{q}$ du point où la ligne des contacts rencontre l'axe des q, ne dépend que du rapport $\frac{p}{q}$ ou $\frac{q}{p}$; donc il sera le même toutes les fois que le point donné sera sur une droite dont l'équation soit $y = \frac{q}{p}x$; et comme cette droite passe par l'origine et par le point donné, et que cette propriété a également lieu, comme la précédente, lorsque l'axe des abscisses est un diamètre quelconque, pourvu que l'axe des ordonnées soit tangent à la courbe ; on a encore en général le théorème suivant :

Si de tant de points que l'on voudra d'une droite qui coupe la parabole, on mène deux tangentes à cette courbe, et que l'on joigne par des cordes les points de contact relatifs à un même point ; toutes ces cordes se couperont en un point unique situé sur la tangente menée au point où la droite donnée rencontre la parabole.

On prouvera facilement aussi, à l'aide de l'équation de la tangente, que la courbe tourne sa concavité vers l'axe principal.

102. L'équation de la normale au point dont les coordonnées sont x', y', est évidemment

$$y - y' = -\frac{y'}{2a}(x - x'),$$

ou, réduction faite,

$$2ay + y'x = 2ay' + x'y'.$$

En supposant $y = 0$, on trouve $x'' = 2a + x'$ pour la distance du sommet au point N (fig. 38) où la normale rencontre l'axe principal; d'où pour la sounormale PN, $x'' - x' = 2a$. Donc, *pour la parabole, la sounormale est constante.*

103. Dans la recherche du cercle osculateur, en appliquant le calcul comme pour l'ellipse, la substitution

$$x = X + x', \quad y = Y + y',$$

donne, pour le cercle,

$$Y^2 + X^2 + 2(y' - q)Y + 2(x' - p)X = 0;$$

pour la parabole,

$$Y^2 + 2y'Y - 4aX = 0.$$

Dans ce cas, il est plus simple d'éliminer X; on trouve

$$\begin{array}{rrrrr} Y^4 + 4y'Y^3 + & 4y'^2 & Y^2 + 32a^2y' & Y = 0. \\ + & 8ax' & + 16ax'y' & \\ + & 16a^2 & - 32a^2q & \\ - & 8ap & - 16apy'. & \end{array}$$

Le coefficient de Y peut se mettre sous la forme

$$16a(2ay' + x'y' - 2aq - y'p)) :$$

pour que l'équation en Y ait deux racines nulles, ce coefficient doit s'anéantir, ce qui donne

$$2aq + y'p = 2ay' + x'y',$$

équation de la normale dans laquelle on a remplacé x et y

par p et q. Donc, *tout cercle dont le centre est sur la normale, et qui passe par le point de contact, est lui-même tangent à la courbe.*

Le coefficient peut se mettre sous la forme

$$8a(3x' + 2a - p);$$

et pour que trois racines de l'équation soient nulles, il faut que l'on ait

$$3x' + 2a - p = 0, \quad \text{ou} \quad p = 3x' + 2a;$$

d'où, à cause de l'équation

$$2aq + y'p = 2ay' + x'y',$$

l'on tire

$$q = -\frac{x'y'}{a}.$$

Quant au rayon du cercle osculateur, c'est-à-dire, au *rayon de courbure*, on a

$$r^2 = (y' - q)^2 + (x' - p)^2,$$

et partant, en substituant les valeurs de p et de q,

$$r^2 = \frac{(a + x')^2(y'^2 + 4a^2)}{a^2}$$

$$= \frac{4(a + x')^3}{a},$$

ou

$$r = \frac{2(a + x')^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi la courbure diminue à mesure que l'on s'éloigne du sommet, et c'est à ce point qu'elle est la plus grande; le rayon de courbure y est évidemment

$$r = 2a.$$

Donc, *la sounormale est égale au rayon de courbure du sommet.*

104. Par la substitution du n° 70, on trouve pour l'équation polaire générale de la parabole

$$z^2 \sin^2\varphi + (2q \sin\varphi - 4a \cos\varphi)z + q^2 - 4ap = 0.$$

On voit ici : 1°. que le coefficient de z ne peut jamais s'anéantir.

2°. Que si l'on fait $q^2 - 4ap = 0$, c'est-à-dire, si le pôle est sur la courbe, on a

$$z = 0, \quad \text{et} \quad z = \frac{4a\cos\varphi - 2q\sin\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

3°. Qu'en posant $q = 0$, et mettant pour $\sin^2\varphi$ sa valeur $1 - \cos^2\varphi$, l'équation précédente prendra la forme

$$z^2 = z^2\cos^2\varphi + 4az\cos\varphi + 4ap :$$

le second membre deviendra un quarré, si $p = a$, et l'on aura

$$z = \pm(z\cos\varphi + 2a),$$

d'où résultent, à cause du double signe, les deux valeurs de z,

$$z = \frac{2a}{1 - \cos\varphi}, \quad z = \frac{-2a}{1 + \cos\varphi}.$$

Il est évident que la première de ces deux valeurs est essentiellement positive, tandis que la seconde est essentiellement négative ; ainsi la première donne la partie de la courbe située au-dessus de l'axe principal, et la seconde la partie située au-dessous. Nous pouvons par conséquent ne considérer que la valeur

$$z = \frac{2a}{1 - \cos\varphi}.$$

Ce pôle s'appelle le *foyer* de la parabole, et les rayons variables *rayons vecteurs*.

Quand on fait $\cos\varphi = 0$, le rayon vecteur est perpendiculaire à l'axe, et égal à $2a$: c'est l'ordonnée qui passe par le foyer, et le double de cette ordonnée est ce qu'on appelle le *paramètre*.

Si l'on veut avoir le rayon vecteur en fonction de l'abscisse, on aura $z\cos\varphi = x - p = x - a$, d'où

$$z = x + a ;$$

de là il suit que si par un point G dont l'abscisse est $-a$, on

mène une droite KGH (fig. 39) perpendiculaire à l'axe principal, les distances de chacun des points de la parabole au foyer et à cette droite, sont égales entre elles.

Cette droite se nomme *directrice*.

Cette propriété fournit un moyen très-simple de construire par points une parabole dont on connaît le foyer et le diamètre. On prendra une abscisse quelconque AP (fig. 40); du foyer F avec un rayon $a + AP$, on décrira un arc de cercle qui coupe en M la perpendiculaire élevée sur l'axe au point P. Le point M appartiendra à la parabole.

On en déduit aussi un moyen de la décrire par un mouvement continu.

En effet, si l'on place une équerre sur la directrice, de manière que l'un des côtés de l'angle droit puisse y glisser, et que l'autre soit parallèle à l'axe; que l'on attache un fil de même longueur que ce second côté, d'un bout à son extrémité, et de l'autre au foyer; lorsque la position de l'équerre sera telle que le fil soit tendu, l'extrémité marquera un point de la parabole; si, appliquant ensuite, à l'aide d'un stile, le fil contre l'équerre, on force cette dernière à glisser sur la directrice, et à s'avancer parallèlement à elle-même vers l'axe, la distance au foyer et à la directrice diminuant en même temps de la même quantité, tous les points que parcourra le stile appartiendront à la parabole.

105. Nous avons trouvé que la distance AN (fig. 41) du sommet au pied de la normale, est $2a + x'$; ainsi la distance FN est exprimée par $a + x$; ainsi que le rayon vecteur: on a donc $FM = FN$, et le triangle FNM est isoscèle; l'angle FMN formé par le rayon vecteur et la normale, est donc égal à l'angle FNM formé par l'axe et la normale; ou, si l'on mène par le point M le diamètre Mm, l'angle FMN est égal à l'angle mMF. D'où il est aisé de conclure que *la tangente fait des angles egaux avec le rayon vecteur et avec le diamètre*. D'ailleurs on le démontrerait encore directement, en observant que l'on a $FT' = a + x$.

On peut, si l'on veut, calculer la tangente de l'angle FMT, ou de l'angle tMm.

Cette propriété donne un moyen de mener une tangente à un point donné sur la courbe, ou au-dehors.

1°. Si le point M (fig. 42) est sur la courbe, on mènera le rayon vecteur FM et la droite Mn perpendiculaire sur la directrice GK; on joindra les points n et F par une droite, et abaissant du point M une perpendiculaire sur Fn, ce sera la tangente cherchée.

2°. Si le point N est donné hors de la courbe; du point N avec la distance NF, on décrira une circonférence qui rencontrera la directrice en deux points n et n'. On mènera les droites Fn, Fn', dont chacune déterminera une tangente, si du point N on abaisse des perpendiculaires sur Fn et Fn'. On marquera les points de contact en menant les droites nM, $n'M'$ parallèles à l'axe.

106. Si l'on regarde le foyer de la parabole comme le centre d'un faisceau de rayons susceptibles d'être réfléchis, la réflexion aura lieu parallèlement à l'axe de la courbe; et réciproquement, si une suite de rayons parallèles à l'axe viennent frapper la courbe, ils se réfléchiront tous au foyer.

Il suit encore de là, que si l'on oppose deux arcs de paraboles égales, de manière qu'ils aient même axe, mais qu'ils se tournent leur concavité, tous les rayons qui partiront du foyer de l'une d'elles, et qui viendront frapper sa circonférence, se réfléchiront parallèlement à l'axe, iront rencontrer l'arc opposé, s'y réfléchiront de nouveau, et se réuniront au foyer de cette dernière, quelle que soit d'ailleurs la distance des sommets.

CHAPITRE IV.

Application de ce qui précède à la solution de quelques problèmes; construction des équations déterminées.

PARAGRAPHE PREMIER.

Problèmes dépendans des lignes du second ordre.

107. PROBLÈME I. *Par un point situé dans un angle droit sur la ligne qui coupe l'angle en deux parties égales, mener une droite telle que la partie interceptée par les côtés de l'angle droit soit d'une grandeur donnée.*

Soit l'angle XAY (fig. 43), et M le point donné; prenons AX pour axe des abscisses, AY pour axe des ordonnées. L'abscisse Ap du point M est égale à son ordonnée Aq, nommons-la x'. L'équation de la droite cherchée mMm' sera de la forme

$$y = Ax + b,$$

A et b étant tous deux inconnus; mais comme cette droite passe par le point M, on aura

$$x' = Ax' + b, \quad \text{ou} \quad A = \frac{x' - b}{x'};$$

substituant cette valeur de A, l'équation devient

$$y = \frac{x' - b}{x'} x + b.$$

En faisant $y = 0$, on trouve pour la distance Am, que nous représenterons par a,

$$a = -\frac{bx'}{x' - b};$$

or $\overline{mm'}^2 = a^2 + b^2$; et si l'on suppose que m soit la longueur donnée, on aura

$$b^2 + \frac{b^2 x'^2}{(x' - b)^2} = m^2,$$

ou, en développant,

$$b^4 - 2x'b^3 + (2x'^2 - m^2)\, b^2 + 2m^2 bx' - m^2 x'^2 = 0.$$

Cette équation étant du quatrième degré et complète, nous n'avons pas de moyen de la résoudre généralement : mais nous observerons qu'elle résulte de l'élimination entre les deux équations

$$a = -\frac{bx'}{x' - b}, \quad a^2 + b^2 = m^2 :$$

la première peut se mettre sous la forme

$$ab = (a + b)x' ;$$

si l'on multiplie cette équation par 2, et qu'on l'ajoute à la seconde, on trouve

$$(a + b)^2 = 2x' (a + b) + m^2,$$

ou

$$(a + b)^2 - 2x' (a + b) = m^2,$$

équation qui détermine $a + b$. En représentant donc $a + b$ par p, on aura enfin

$$a + b = p, \quad ab = px' ;$$

p une fois déterminé par l'équation

$$p^2 - 2x'p = m^2,$$

on trouvera donc a et b par la résolution d'une autre équation du second degré.

Cet exemple fait voir que la méthode que l'on suit dans l'élimination est loin d'être indifférente, puisqu'il arrive souvent, comme dans le cas actuel, qu'en employant un artifice particulier, on évite de tomber sur une équation d'un degré élevé.

Mais si l'on veut construire le problème, on peut même se dispenser de déterminer les valeurs de a et b. En effet, d'après ce que nous avons indiqué dans le préliminaire (n° 16), si nous regardons les inconnues a et b comme les coordonnées des courbes représentées par les deux équations; en construisant séparément ces courbes, les coordonnées de leurs points d'intersection seront les valeurs de a et b.

L'équation $a^2 + b^2 = m^2$ est celle d'un cercle, dont le rayon est m, et dont le centre est à l'origine; mais l'équation $ab = (a + b)\,x'$ est celle d'une hyperbole équilatère, que l'on ne doit employer que lorsqu'il est impossible de l'éviter, parce que la construction géométrique ne peut s'en exécuter que par points. Or, au lieu de cette seconde équation, on peut employer l'équation $a + b = p$, qui appartient au système de deux lignes droites, parce que p a deux valeurs données par l'équation

$$p^2 - 2x'p = m^2,$$

et qui sont

$$x' + \sqrt{(m^2 + x'^2)}, \quad x' - \sqrt{(m^2 + x'^2)}.$$

Ainsi, en décrivant du point A (fig. 44) comme centre une circonférence dont le rayon soit égal à la ligne donnée, il ne restera qu'à déterminer les droites dont les équations sont

$$b + a = x' + \sqrt{(m^2 + x'^2)},$$
$$b + a = x' - \sqrt{(m^2 + x'^2)}.$$

Ces deux droites sont parallèles entre elles, et font avec l'axe AX un angle dont la tangente est -1, c'est-à-dire qu'elles sont perpendiculaires à la droite AM.

Les coordonnées à l'origine se construisent avec la plus grande facilité, en joignant le point q, et le point b où AX est rencontré par la circonférence, et décrivant du même point q avec le rayon qb un arc de cercle qui coupe la direction de l'axe AY en deux points B et B', par lesquels les perpendiculaires doivent être menées sur AM. Ces droites couperont la circonférence décrite du point A en quatre points N, N', N'', N''', dont les abscisses AP, AP', etc. sont les valeurs de a. Les ordonnées AQ, AQ', etc. seraient les valeurs de b, mais les points P, P', P'', P''' suffisent pour résoudre le problème.

Il a, comme on le voit, en général, quatre solutions; il est même aisé de se convaincre que, dans tous les cas il en aura au moins deux, car la droite $N''B'N'''$ coupera toujours la circonférence, puisque AB' est au signe près égal à ..... $\sqrt{(m^2+x'^2)}-x'$ qui est toujours plus petit que m. Mais la droite BNN' peut être tangente, ou même ne pas toucher le cercle. Dans le premier cas, les deux solutions P, P' se réduisent à une seule; dans le second elles n'existent pas. Or cette circonstance aura lieu quand la perpendiculaire abaissée du centre sur la droite BNN' sera plus grande que le rayon m: cette perpendiculaire a pour expression (n° 23),

$$\frac{x'+\sqrt{(m^2+x'^2)}}{\sqrt{2}};$$

ainsi la condition est

$$\frac{x'+\sqrt{(m^2+x'^2)}}{\sqrt{2}} > m, \text{ ou } \sqrt{(m^2+x'^2)} > m\sqrt{2}-x';$$

d'où, en élevant au quarré, l'on tire

$$m < 2x'\sqrt{2}:$$

or $2x'\sqrt{2}$ est évidemment l'expression de la droite menée par

le point M perpendiculairement à la droite AM; donc toutes les fois que la ligne donnée est plus petite que mm', le problème n'a que deux solutions.

Nous exposerons encore une solution du même problème, parce qu'elle conduit à une construction fondée sur les mêmes principes, quoique différente.

Nous prendrons l'origine au point M (fig. 45), et désignant toujours par x' les distances Mp et Mq, nous ferons $q\mu = y'$; alors l'équation de la droite $mM\mu$ sera

$$y = -\frac{y'}{x'}x;$$

d'où Mr, qui est l'abscisse correspondante à l'ordonnée $-x'$, sera $\frac{x'^2}{y'}$; de sorte que les lignes Am, $A\mu$ représentées par a et b, auront pour valeurs en fonction de y',

$$b = x' + y', \quad a = x' + \frac{x'^2}{y'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'une quelconque des équations en a et b, on en obtiendrait une en y' seulement; et si l'on choisit l'équation

$$a + b = p,$$

elle devient

$$2x' + y' + \frac{x'^2}{y'} = p;$$

ou

$$y'^2 + x'^2 + (2x' - p)y' = 0:$$

or $2x' - p$ est, à cause de la double valeur de p, égal à

$$x' - \sqrt{(m^2 + x'^2)}, \text{ ou à } x' + \sqrt{(m^2 + x'^2)},$$

suivant que l'on prendra dans p le signe supérieur ou le signe inférieur. Désignons la première de ces valeurs par $-2r$, la

seconde par $2r'$, on aura les deux équations

$$y'^2 + x'^2 - 2ry' = 0, \text{ ou } y'^2 + x'^2 + 2r'y' = 0,$$

qui, en considérant pour un instant y', x' comme des coordonnées variables, appartiennent à des cercles qui ont leurs centres c, c' sur l'axe des ordonnées, qui passent tous deux par l'origine M, et s'y touchent par conséquent. D'ailleurs les ordonnées des centres, c'est-à-dire les rayons, sont respectivement r et $-r'$. Ainsi ces cercles seront faciles à décrire; cela posé, les points μ, μ', μ'', μ''' où ils sont rencontrés par la droite AY, seront ceux où les droites cherchées doivent aboutir. On aura donc les quatre solutions, en menant les droites μMm, $\mu' Mm'$, $\mu'' Mm''$, $\mu''' Mm'''$.

108. PROBLÈME II. *Exprimer les relations nécessaires pour que deux cercles se coupent ou se touchent.*

Prenons pour axe des abscisses la droite qui joint les centres, et l'origine au centre de l'un des cercles. Soit m l'abscisse de l'autre; les équations des deux cercles seront

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x-m)^2 + y^2 = r'^2.$$

En combinant ces deux équations, on trouve pour coordonnées des points d'intersection,

$$x = \frac{m^2 + r^2 - r'^2}{2m},$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{\{4m^2r^2 - (m^2 + r^2 - r'^2)^2\}}}{2m};$$

x n'ayant dans tous les cas qu'une seule valeur, il s'ensuit que *la droite qui joint les points d'intersection est perpendiculaire à celle qui joint les centres.*

Les valeurs de y étant égales au signe près, il s'ensuit que *la première droite est coupée en deux parties égales par la seconde.*

Mais ce qui précède suppose que le radical soit réel ; or on peut mettre la quantité sous le signe sous les formes successives

$$(2mr+m^2+r^2-r'^2)\,(2mr-m^2-r^2+r'^2),$$
$$\{(m+r)^2-r'^2\}\times\{r'^2-(m-r)^2\},$$
$$(m+r+r')\,(m+r-r')\,(r'+m-r)\,(r'-m+r).$$

Or $m+r+r'$ étant essentiellement positif, il est facile de voir que si r' est le plus grand rayon, $m+r'-r$, ou $r'+m-r$ le sera aussi, et que partant, le produit sera positif, si l'on a à-la-fois

$$m+r>r', \quad r'+r>m;$$

c'est-à-dire, *si la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et que le plus grand rayon soit plus petit que la distance des centres plus le plus petit rayon.*

Si l'un des facteurs est nul, l'ordonnée y sera nulle, et par conséquent les cercles n'ayant qu'un point commun seront tangens ; et réciproquement, si les deux cercles se touchent, les valeurs de y doivent être égales, ce qui ne peut avoir lieu que lorsqu'elles sont nulles toutes deux ; ainsi les conditions de contingence sont renfermées dans les deux relations

$$m+r=r', \quad r'+r=m,$$

c'est-à-dire que pour que deux cercles se touchent, il est nécessaire et il suffit *que le plus grand rayon soit égal à la distance des centres plus le plus petit rayon*, ou *que la distance des centres soit égale à la somme des rayons.*

109. PROBLÈME III. *Mener une droite qui touche deux cercles donnés.*

En prenant pour axe des abscisses la ligne qui joint les centres, et pour origine l'un des centres, on aura, comme au n° précéd.,

$$x^2+y^2=r^2, \quad (x-m)^2+y^2=r'^2,$$

pour les équations des deux cercles.

Désignons par x', y' les coordonnées du point où la droite touche le premier cercle, le rayon qui passe par le point de contact aura pour équation

$$y = \frac{y'}{x'} x ;$$

le rayon mené dans l'autre cercle à son point de contact est parallèle au premier, et partant son équation sera

$$y = \frac{y'}{x'} (x - m) :$$

en éliminant entre cette équation et celle du second cercle, on aura les coordonnées du second point de contact. On trouve, par la substitution de la valeur de y,

$$(x'^2 + y'^2)\ (x - m)^2 = r'^2 x'^2 ;$$

d'où, à cause de $x'^2 + y'^2 = r^2$, en extrayant la racine,

$$x - m = \pm \frac{r'x'}{r}, \quad \text{et} \quad x = m \pm \frac{r'x'}{r} ;$$

et de là

$$y = \pm \frac{r'y'}{r} ;$$

La tangente passant par les deux points de contact, on trouvera pour son équation

$$y - y' = \frac{(r \mp r')\, y'}{(r \mp r')\, x' - mr} (x - x') ;$$

mais d'ailleurs (n° 62) la tangente a pour équation

$$y - y' = -\frac{x'}{y'} (x - x') ;$$

donc on doit avoir

$$\frac{(r \mp r')\, y'}{(r \mp r')\, x' - mr} = -\frac{x'}{y'} .$$

Cette équation réduite donne, par la relation $x'^2 + y'^2 = r^2$,

$$(r \mp r')\, r^2 = mrx' ,$$

ou

$$x' = \frac{r(r \mp r')}{m},$$

et partant,

$$y' = V\left\{r^2 - \frac{r^2(r \mp r')^2}{m^2}\right\};$$

$$= \frac{r}{m} V\{m^2 - (r \mp r')^2\}.$$

La valeur de x' est facile à construire, et déterminera le point de contact avec le premier cercle. Mais si l'on cherche le point ou la droite dont l'équation est

$$y - y' = \frac{(r \mp r')\,y'}{(r \mp r')\,x' - mr}(x - x');$$

rencontre l'axe des abscisses, c'est-à-dire la ligne qui joint les centres; on trouve, en faisant $y = 0$,

$$x'' = \frac{mr}{r \mp r'};$$

et comme cette valeur est indépendante de x', y', il s'ensuit que la condition que nous venons d'exprimer n'est pas nécessaire pour déterminer ce point, et qu'on l'obtiendra en joignant les extrémités de deux rayons parallèles quelconques.

x'' a deux valeurs $\frac{mr}{r - r'}$ et $\frac{mr}{r + r'}$, partant, il y a sur la droite qui joint les centres deux points qui satisfont aux conditions du problème. D'ailleurs la valeur de y' ne sera réelle qu'autant que

$$(m + r \mp r')\ (m - r \pm r')$$

sera positif; d'où il est aisé de conclure, par le n° précédent, que cette valeur sera imaginaire quand l'un des cercles sera compris dans l'autre, et que les deux solutions, ou plutôt les quatre, puisque chaque point en donne deux, se réduiront à la moitié, quand ils se couperont.

110. PROBLÈME. IV. *Par deux points donnés, faire passer une circonférence tangente à une droite donnée.*

Soient N, N' (fig. 46) les points donnés, et AB la droite. Le centre du cercle cherché se trouve nécessairement sur la droite QO élevée perpendiculairement au milieu de NN'. Prenons pour axe des abscisses la droite QO, et plaçons l'origine au centre. Cette origine sera inconnue, mais l'équation du cercle cherché sera toujours

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Désignons par a la moitié de la corde NN', et par m l'abscisse inconnue OQ; puisque le cercle passe par le point N, on aura, en faisant $x = m$, $y = a$,

$$a^2 + m^2 = r^2.$$

Si l'on nomme b la distance connue QC du point Q à celui où l'axe QO est rencontré par la droite AB, et que A soit la tangente trigonométrique de l'angle qu'elle fait avec l'axe, l'équation de cette droite sera

$$y = A(x - b + m);$$

or le rayon mené au point de contact étant perpendiculaire sur la tangente, on trouvera pour la longueur du rayon (n° 23),

$$r^2 = \frac{A^2(b-m)^2}{A^2+1};$$

mais on a déjà $r^2 = a^2 + m^2$; donc

$$(A^2+1) \times (a^2+m^2) = A^2(b-m)^2.$$

Cette équation développée donne

$$m^2 + 2A^2bm + a^2(A^2+1) - A^2b^2 = 0,$$

d'où

$$m = -A^2b \pm \sqrt{(A^2+1)(A^2b^2-a^2)};$$

m étant connu, on aura facilement r.

Or on tire de cette valeur, en la divisant par a,

$$\frac{m}{a} = -A^2 \cdot \frac{b}{a} \pm \sqrt{(A^2+1)\left(A^2\frac{b^2}{a^2}-1\right)},$$

expression qui ne dépend que de A et du rapport $\frac{b}{a}$. Ainsi $\frac{m}{a}$, et partant $\frac{a}{m}$ est constant, toutes les fois que A et $\frac{a}{b}$ conservent la même valeur. Mais $\frac{a}{m}$ est la tangente de l'angle que fait avec l'axe le rayon ON, $\frac{a}{b}$ est celle de l'angle que fait avec l'axe la droite NC; donc si l'on voulait faire passer un autre cercle qui touchât la même droite, par les points n, n' situés sur les droites NC, $N'C$, les rayons NO, no seraient parallèles; d'où résulte évidemment la construction suivante. D'un point quelconque o de la droite, on abaissera sur la droite AB la perpendiculaire op, et du point o comme centre, avec op comme rayon, on décrira une circonférence qui rencontre les droites CN et CN' en n, n'. On mènera le rayon on, et par le point N une droite parallèle à on, le point O où elle rencontrera QC, sera le centre du cercle cherché. Au reste la circonférence décrite du point o rencontrant nécessairement NC en un second point r, il en résultera une seconde solution.

Si l'on avait $a^2 = A^2b^2$, c'est-à-dire si la droite AB se confondait avec NC ou $N'C$, la valeur de m cesserait d'être double, et deviendrait

$$m = -\frac{a^2}{b},$$

expression que l'on construirait directement, en élevant par celui des points N, N' qui se trouve sur AB, une perpendiculaire à cette droite.

Si l'on avait $a^2 > A^2b^2$, la valeur de m deviendrait imaginaire; or il est aisé de voir que dans ce cas les points N et N' se trouveraient placés l'un d'un côté, l'autre de l'autre de

la droite AB, circonstance qui rend visiblement le problème impossible.

111. PROBLÈME V. *Étant donnée une ellipse ou une hyperbole rapportée à ses axes, trouver l'équation de la courbe que détermineraient les intersections des droites menées des extrémités du premier axe aux extrémités des cordes qui lui sont perpendiculaires.*

Soit

$$y^2 = \pm \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

l'équation de la courbe; le signe supérieur ayant lieu pour l'ellipse, et le signe inférieur pour l'hyperbole. Désignons par y' la moitié d'une certaine corde, c'est-à-dire une ordonnée quelconque, et par x' l'abscisse qui lui correspond. L'une des droites passe par l'extrémité positive du premier axe, l'autre par l'extrémité négative; la première passe par le point dont les coordonnées sont x', y', la seconde par le point dont les coordonnées sont x', $-y'$; et il faut faire attention que y' peut être une ordonnée positive ou négative. Les équations des deux droites seront donc

$$y = \frac{y'}{x' - a}(x - a), \quad y = -\frac{y'}{x' + a}(x + a);$$

or la coexistence de ces deux équations, en y regardant x et y comme les mêmes, exprime que le point auquel appartiennent les coordonnées x et y, se trouve à l'intersection des deux droites. Si donc on parvient à éliminer x', y' qui particularisent la position du point, en exprimant que x', y' appartiennent à la circonférence de l'ellipse, l'équation en x, y qui en résultera, sera celle de la courbe cherchée.

Cela posé, en multipliant les deux équations membre à membre, on trouve

$$y^2 = -\frac{y'^2}{x'^2 - a^2}(x^2 - a^2);$$

or x', y' étant les coordonnées d'un point pris arbitrairement sur la courbe donnée, on a $y'^2 = \pm\frac{a^2}{b^2}(a^2 - x'^2)$; donc l'équation précédente devient par la substitution,

$$y^2 = \mp\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2);$$

c'est-à-dire, que si la courbe donnée est une ellipse, la courbe cherchée sera une hyperbole dont les axes seront ceux de l'ellipse, et réciproquement. Ces courbes s'appellent *conjuguées*.

Si l'on eût éliminé y' entre les équations des deux droites, on aurait trouvé le résultat

$$xx' = a^2, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{a^2}{x};$$

ou bien $y' = -\frac{ay}{x}$, ce qui aurait conduit au même résultat, par la substitution des valeurs de x', y' dans l'équation

$$y'^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2).$$

Mais la valeur $\frac{a^2}{x'}$ que l'on trouve pour x', ou la valeur $\frac{a^2}{x'}$ que l'on aurait pour x, fournissent une propriété assez remarquable. Car $\frac{a^2}{x'}$ étant (n° 62) la distance du centre de la courbe donnée au pied de la tangente menée à celui de ses points dont les coordonnées sont x', y', et la même chose pouvant se dire pour $\frac{a^2}{x}$ à l'égard de la seconde; il s'ensuit que la tangente menée au point générateur rencontre l'axe au pied de l'ordonnée du point engendré. On peut déduire de cette propriété une manière de mener une tangente à l'ellipse ou à l'hyperbole, par un point donné sur la courbe, mais sans la supposer décrite.

On joindra le point donné M (fig. 47) et l'une des extré-

mités B du premier axe, l'autre extrémité B' de cet axe et celle de la corde perpendiculaire qui passe par le point donné. Les deux droites BM, $B'M'$ se rencontreront en un point N, et si de ce point on abaisse une perpendiculaire Np sur l'axe, elle marquera le pied p de la tangente.

La valeur $y' = -\frac{ay}{x}$, et la valeur $y = -\frac{ay'}{x'}$ qu'il est facile d'en déduire, prouvent que si l'on mène par le centre de la courbe donnée une droite au point engendré, cette droite rencontrera la perpendiculaire élevée à l'extrémité de l'axe, en un point dont l'ordonnée sera précisément celle du point générateur, et réciproquement. Nous verrons au paragraphe suivant une application de cette propriété.

112. PROBLÈME VI. *Trouver l'équation de la courbe dont chaque point jouit de la propriété que la somme de ses distances à deux points fixes soit égale à une ligne donnée.*

Soient F et F' les points fixes (fig. 48), et nommons $2c$ la distance FF'; supposons que M soit un certain point de la courbe, la somme des distances FM, $F'M$ doit être égale à une ligne donnée que nous représenterons par $2a$. Abaissons du point M la perpendiculaire MP, prenons $F'F$ pour axe des abscisses, l'axe des ordonnées perpendiculaire, et l'origine au milieu de la ligne $F'F$. Faisons $MP = y$, $AP = x$, $FM = z$, $F'M = z'$, on aura

$$z^2 = y^2 + (c - x)^2, \quad z'^2 = y^2 + (c + x)^2, \quad z + z' = 2a.$$

En retranchant la première équation de la seconde, on trouve

$$z'^2 - z^2 = 4cx;$$

ou, à cause de la troisième, et en observant que $z'^2 - z^2 = (z' + z)(z' - z)$,

$$z' - z = \frac{2cx}{a}.$$

Comme on connaît maintenant la somme et la différence des quantités z, z', on trouvera

$$z' = a + \frac{cx}{x}, \quad z = a - \frac{cx}{a},$$

Substituant la valeur de z dans la première équation, elle donne

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = y^2 + c^2 - 2cx + x^2,$$

ou, reduction faite,

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Or a est $> c$, puisque $2a$ ou $z + z'$ est nécessairement plus grand que $2c$; donc cette équation est celle d'une ellipse, comme on devait s'y attendre,

113. PROBLÈME VII. *Trouver l'équation de la courbe dont chaque point jouit de la propriété que la difference de ses distances à deux points fixes soit égale à une ligne donnée.*

En opérant comme dans le problème précédent, *mutatis mutandis*, on parvient de même à l'équation

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

mais comme on a $z' < z + 2c$, il s'ensuit que $z' - z < 2c$, et, comme par hypothèse $z' - z = 2a$, que a est $< c$; $a^2 - c^2$ est donc négatif, et partant l'équation appartient à l'hyperbole.

114. PROBLÈME VIII. *Trouver l'équation de la courbe dont chaque point jouit de la propriété que ses distances à un point fixe et à une ligne donnée soient égales entre elles.*

Soit F le point fixe (fig. 49), DE la droite donnée qui rencontre en C la perpendiculaire abaissée sur elle du point F. Prenons pour axe des abscisses la droite FC, et l'origine au milieu de FC, en faisant $FC = 2a$, et l'axe des ordonnées étant toujours

perpendiculaire. Si le point M appartient à la courbe, la distance MF sera égale à la distance Mm, ou si l'on abaisse l'ordonnée MP, on aura $MF = CP$. Or $\overline{MF}^2 = (x-a)^2 + y^2$, $CP = a + x$; donc

$$y^2 + (x-a)^2 = (a+x)^2,$$

ou, réduction faite,

$$y^2 - 4ax = 0,$$

équation de la parabole.

§ II.

Construction des équations.

115. Le principe général qui sert à la construction des équations, consiste à considérer l'équation proposée comme le résultat de l'élimination entre deux équations à deux inconnues. Chacune de ces dernières pouvant être regardée comme l'équation d'une courbe, il suit de ce que nous avons dit dans le *préliminaire* (n° 10), que les intersections des deux lignes feront connaître les valeurs des inconnues, et par conséquent, si celle de l'équation proposée a été prise pour l'abscisse, les abscisses des points de rencontre donneront les racines de cette équation.

Toutes les fois qu'il n'est nécessaire d'employer que le cercle et la ligne droite, la construction est dite *géométrique*, et par conséquent tout problème peut être regardé comme résolu géométriquement, quand l'équation à laquelle il conduit est susceptible d'être construite par la ligne droite et le cercle. Mais la solution devient *mécanique*, quand on est forcé d'employer des courbes que l'on ne peut construire que par points. Cette différence tient à ce que la description du cercle peut

être regardée comme rigoureuse, tandis que celle des autres courbes ne l'est pas, du moins pour les points qui n'ont pas été déterminés directement. Car le seul moyen que l'on ait de tracer en général une courbe, consiste à déterminer un certain nombre de ses points, plus ou moins rapprochés, et à joindre ces points par des arcs qui ne peuvent être considérés rigoureusement que comme approchant de se confondre avec ceux de la courbe cherchée.

Mais comme ce sujet n'est que d'une utilité très-secondaire, nous n'entrerons pas dans tous les détails qui pourraient être nécessaires pour le traiter d'une manière complète, et nous nous bornerons à parler de la construction des équations des 2e, 3e et 4e degrés, qui sont les seules que l'on puisse construire, du moins en général, par la description des courbes du second ordre.

116. Comme une circonférence de cercle est toujours rencontrée en deux points par une ligne droite, on conçoit d'avance que le résultat de l'élimination entre l'équation du cercle et celle de la ligne droite, sera nécessairement du second degré, et que par conséquent toute équation du second degré sera constructible par le cercle. C'est ce que l'on trouverait effectivement en éliminant entre les équations

$$x^2+y^2=r^2 \quad \text{et} \quad y=ax+b,$$

où r, a, b sont indéterminés, et comparant le résultat à l'équation $x^2+px+q=0$. Mais on peut, d'une manière bien plus simple, construire directement l'équation du second degré.

Nous remarquerons d'abord que le changement du signe de p ne faisant que changer le signe des racines, il est indifférent, quant à la construction, de considérer l'équation... $x^2+px+q=0$, ou l'équation $x^2-px+q=0$. Nous ne parlerons donc que de cette dernière. Or q lui-même peut être positif ou négatif, et dans tous les cas (n° 30), il peut

être ramené au produit de deux lignes, et partant à un quarré. Les deux seules formes d'équations qui doivent nous occuper sont donc les suivantes :

$$x^2 - px + q^2 = 0, \quad x^2 - px - q^2 = 0.$$

On tire de la première

$$q^2 = px - x^2 :$$

or si l'on considère (fig. 50) un cercle AMB, dont le centre soit en O, et dont le diamètre soit p, en prenant l'origine à l'extrémité A du diamètre, son équation serait (chap. 3, n° 69)

$$y^2 = px - x^2 ;$$

ainsi la valeur de x est celle de l'abscisse de ce cercle qui correspond à l'ordonnée q. Il est aisé de conclure de là, que si l'on prend sur l'axe des ordonnées une partie $Aq = q$, et que l'on mène qMM' parallèle à AB, les parties qM, qM' sont les deux racines de l'équation proposée.

La seconde équation donne

$$q^2 = x^2 - px,$$

qui devient l'équation d'une hyperbole équilatère dont l'axe serait p, si l'on remplace q par y. La seconde remarque que nous avons faite au n° 111 (§ précéd.), peut conduire d'une manière assez élégante à la construction, sans décrire d'hyperbole. En effet (fig. 51), si l'on décrit, comme pour le cas précédent, le cercle dont l'équation serait $y^2 = px - x^2$, où l'origine est toujours à l'extrémité du diamètre, il s'agirait de déterminer l'abscisse de l'hyperbole conjuguée qui correspond à l'ordonnée q. Or, d'après la remarque citée, si nous prenons sur l'axe AY l'ordonnée $Aq = q$, et que nous menions Oq, cette droite passera par le point générateur du point cherché de l'hyperbole : comme il y a deux points de l'hyperbole qui ont pour ordonnée q, on trouve que la droite Oq rencontre

le cercle en deux points m, m'. On joindra ces deux points et l'extrémité B du diamètre par les droites Bm, Bm' qui passent par les points cherchés; mais d'ailleurs ces mêmes points doivent se trouver sur la droite menée par le point q parallèlement à l'axe; donc si cette droite rencontre en M et M' les droites Bm, Bm', M et M' seront les deux points de l'hyperbole, et même il est évident que qM et qM' sont les deux racines cherchées; elles sont de signes contraires, comme l'exige l'équation.

Nous n'avons présenté cette construction que parce que son analogie avec la première la rend assez intéressante, car il est manifeste que la droite Oq donne directement la solution du problème. On a, en effet, (Géom.) $qm.qm' = Aq^2$; or mm' étant un diamètre, on a $mm' = p$, et $qm = qm' - p$, d'où en faisant $qm' = x$, $x^2 - px = q^2$. Ainsi qm' est une des racines, et qm est égal à l'autre, au signe près. Il serait facile au reste de démontrer sur la figure, que les triangles Mqm, $M'qm'$ sont isoscèles.

117. L'équation complète du troisième degré est

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

où q est du second degré, et r du troisième. Si l'on suppose $x^2 = ky$, y étant une nouvelle inconnue et k une quantité arbitraire, mais regardée comme constante, l'équation proposée deviendra

$$kxy + pky + qx + r = 0.$$

Ainsi cette équation peut être regardée comme le résultat de l'élimination entre les deux équations à deux inconnues

$$kxy + pky + qx + r = 0 \quad \text{et} \quad x^2 = ky;$$

la première est celle d'une hyperbole rapportée à des axes parallèles aux asymptotes, et qui sera par conséquent équi-

latère, si les axes sont rectangulaires: la seconde est, dans la même hypothèse, l'équation d'une parabole dont le sommet est à l'origine, et dont l'axe principal est dirigé suivant l'axe des ordonnées.

Le coefficient k étant arbitraire, on pourra en disposer de manière à simplifier l'équation, pourvu cependant qu'on ne le fasse pas nul, car cette hypothèse n'est pas permise par l'équation $x^2 = ky$.

Le plus souvent, au lieu d'opérer directement sur l'équation du troisième degré, on la fait monter au quatrième en multipliant par x : on introduit ainsi la racine $x = 0$, que la construction doit reproduire, mais dont alors on ne tient pas compte. Ainsi nous passerons au quatrième degré.

118. L'équation complète du quatrième degré étant

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

si l'on fait, comme au n° précéd., $x^2 = ky$, et observant que $x^4 = (x^2)^2$ et $x^3 = x^2 . x$, elle devient

$$k^2y^2 + pkxy + qx^2 + rx + s = 0 \ldots\ldots (A)$$

équation qui appartiendra à l'ellipse, à la parabole ou à l'hyperbole, suivant que $p^2k^2 - 4qk^2$, ou, ce qui revient au même, suivant que $p^2 - 4q$ sera négatif, zéro ou positif.

Si dans l'équation (A) on remplace x^2 par ky, elle devient

$$k^2y^2 + pkxy + qky + rx + s = 0 \ldots\ldots (B)$$

qui appartiendra à l'hyperbole, à moins qu'on n'ait $p = 0$, cas auquel elle appartiendrait à la parabole. Mais si $p = 0$, l'équation (A) peut toujours être ramenée à celle d'un cercle ou d'une hyperbole équilatère, en prenant $k^2 = q$, ou $k^2 = -q$, suivant que q est positif ou négatif. On aurait alors

$$y^2 \pm x^2 + \frac{r}{q}x + \frac{s}{q} = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$y^2 \pm \left(x \pm \frac{r}{2q}\right)^2 = \frac{r^2 - 4sq}{4q^2} \ldots\ldots (C)$$

équation d'un cercle ou d'une hyperbole équilatère dont le centre est sur l'axe des abscisses à une distance $\frac{r}{2q}$ de l'origine, et dont le diamètre est $\frac{\sqrt{(r^2-4sq)}}{q^2}$. Or on sait que l'on peut toujours faire disparaître le second terme d'une équation, et par conséquent on peut supposer dans tous les cas $p = 0$. Donc la construction d'une équation du quatrième degré peut être ramenée à ne dépendre que d'un cercle et d'une parabole, ou d'un cercle et d'une hyperbole équilatère, en employant l'équation (A) et l'équation $x^2 = ky$. Elle peut être ramenée à ne dépendre que de deux paraboles, en remplaçant l'équation (A) par l'équation (B).

On peut encore mettre l'équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ sous la forme

$$(2x^2 + px + q)^2 - p^2x^2 - 2(pq - 2r)x - (q^2 - 4s) = 0,$$

et si l'on pose

$$2x^2 + px + q = ky,$$

elle devient

$$k^2y^2 - p^2x^2 - 2(pq - 2r)x - (q^2 - 4s) = 0.$$

La première de ces équations appartient à une parabole dont l'axe principal est sur celui des ordonnées, mais dont le sommet n'est pas à l'origine; la seconde est celle d'une hyperbole, que l'on peut rendre équilatère en prenant $k = p$. Mais si l'on suppose $p = 0$, les équations précédentes deviennent

$$2x^2 - ky + q = 0,$$
$$k^2y^2 + 4rx - (q^2 - 4s) = 0,$$

et chacune d'elles appartient à une parabole.

Si l'on ajoute ces équations, on trouve

$$k^2y^2 + 2x^2 - ky + 4rx + q - q^2 + 4s = 0,$$

qui deviendra celle d'un cercle, en prenant $k^2 = 2$, et que l'on pourra combiner avec l'une des deux autres. Quand on a $r = 0$, la seconde se réduit à

$$k^2y^2 = q^2 - 4s$$

qui détermine entièrement y, et la première donne alors la valeur de x. Ce résultat n'est pas étonnant, puisque l'équation proposée est, dans ce cas,

$$x^4 + qx^2 + s = 0,$$

et peut se résoudre à la manière du second degré.

119. Supposons, pour donner un exemple, que l'on propose de construire les racines de l'équation

$$4x^3 - 3r^2x + qr^2 = 0,$$

qui donne la trisection de l'angle dont le sinus est $MP = q$, dans le cercle $MM'M''$ (fig. 52) dont r est le rayon (Trig. n° 19): si l'on y fait directement $x^2 = ky$, elle devient

$$4kxy - 3r^2x + qr^2 = 0,$$

ou, en prenant $k = r$,

$$4xy - 3rx + qr = 0 \quad \text{et} \quad x^2 = ry.$$

La première équation appartient, comme nous l'avons déjà dit, à une hyperbole. Elle donne

$$y = \frac{3}{4}r - \frac{1}{4}\frac{qr}{x}.$$

Ainsi (n° 36) l'une des asymptotes, qui est parallèle à l'axe

des x, en est située à la distance $\frac{3}{4}r$, c'est-à-dire, que si nous prenons le centre A pour origine, il faudra porter sur l'axe des ordonnées une distance Ao égale aux trois quarts du rayon; la droite sos', menée parallèlement à AX, sera l'asymptote, l'autre asymptote a pour équation $x = 0$; ainsi elle se confond avec l'axe des ordonnées; le point o est donc le centre de l'hyperbole. Or d'après ce que nous avons vu (n° 29), il suffit, pour décrire cette conrbe, de connaître un de ses points, quand on a les asymptotes; et si l'on suppose $x = Ap = q$, on trouve $y = \frac{r}{2}$. Ce point une fois déterminé, on décrira facilement l'hyperbole par le procédé du n° cité.

La seconde équation appartient à une parabole rapportée à son axe dirigé suivant AY, et qui a pour paramètre le rayon du cercle : on décrira facilement cette courbe ; elle rencontrera la partie inférieure de l'hyperbole en deux points, et la partie supérieure en un seul; les abscisses Ap', Ap'', Ap''' de ces trois points seront les trois valeurs de x.

En faisant monter l'équation $4x^3 - 3r^2x + qr^2 = 0$ au quatrième degré, elle devient

$$4x^4 - 3r^2x^2 + qr^2x = 0 :$$

1°. Si l'on y fait $x^2 = ky$, on en déduit

$$4k^2y^2 - 3r^2x^2 + qr^2x = 0,$$

équation d'une hyperbole rapportée au premier axe et au sommet, et qui devient celle d'une hyperbole équilatère, si l'on prend $4k^2 = 3r^2$; on a, dans ce cas,

$$y^2 - x^2 + \frac{q}{3}x = 0.$$

On décrira cette hyperbole avec facilité, surtout après avoir déterminé les asymptotes, d'autant plus que l'on connaît un

point de la courbe, le centre du cercle qui sert d'origine. Quant à la parabole, elle est de même que tout-à-l'heure rapportée à son axe principal; et comme $k = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, le paramètre de cette parabole est moitié du côté du triangle équilatéral inscrit : nous ne nous arrêterons pas au cas où la construction dépend de deux paraboles, et, pour abréger, nous passerons sur-le-champ à celui du cercle.

2°. L'équation

$$4x^4 - 3r^2x^2 + qr^3x = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$(4x^2 - 3r^2)^2 + 4qr^3x - 9r^4 = 0,$$

qui donne

$$k^2y^2 + 4qr^3x - 9r^4 = 0, \text{ en faisant } 4x^2 - 3r^2 = ky;$$

si l'on multiplie la seconde de ces équations par r^2, pour établir l'homogénéité, et qu'on ajoute, elles donnent

$$k^2y^2 + 4r^2x^2 - kr^2y + 4qr^3x - 12r^4 = 0;$$

ou, en prenant $k = 2r$, et divisant par $4r^4$,

$$y^2 + x^2 - \frac{r}{2}y + qx - 3r^2 = 0,$$

équation qui peut se mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{r}{4}\right)^2 + \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{4q^2 + 49r^2}{16},$$

et qui par conséquent appartient à un cercle dont le centre a pour coordonnées $x = -\frac{q}{2}$, $y = \frac{r}{4}$, et dont le rayon est

$$\frac{1}{4}\sqrt{(4q^2 + 49r^2)},$$

valeur facile à construire. Cette équation doit être combinée avec l'une ou l'autre des deux dont elle résulte par l'addition : elles appartiennent toutes deux à la parabole, et l'hypothèse $k = 2r$ les réduit à

$$y^3 + qx - \frac{9}{4}r^2 = 0, \quad x^3 - \frac{1}{2}ry - \frac{3}{4}r^2 = 0.$$

La parabole que donne la première a pour axe l'axe des abscisses, et comme en faisant $y = 0$, on a $x = \frac{9r^2}{4q}$; le sommet est facile à trouver; le paramètre est d'ailleurs q, c'est-à-dire le sinus donné lui-même. La parabole que donne la seconde a au contraire pour axe l'axe des ordonnées; en faisant $y = 0$, on trouve $x = \frac{3r}{2}$, le sommet se détermine sans construction, et le paramètre est égal à la moitié du rayon. On voit qu'il y a quelque avantage à employer la seconde; cet avantage deviendrait bien plus grand, si l'on avait plusieurs arcs à couper en trois parties égales, puisque l'équation $x^3 - \frac{1}{2}ry - \frac{3}{4}r^2 = 0$, ne dépendant point de q, la parabole ne changerait point pour les différens arcs. Au reste cet avantage se retrouve également dans les constructions données par l'hypothèse $x^3 = ky$, mais dans la dernière la courbe variable est un cercle.

120. Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet, et nous finirons en observant que l'on parviendrait au même résultat, en construisant la courbe donnée par l'équation proposée, dans laquelle on mettrait une inconnue y au lieu de zéro dans le second membre. Par exemple, l'équation $x^3 + px + q = 0$ devient

$$x^3 + px + q = y;$$

et si l'on suppose tracée la courbe à laquelle appartient cette équation, aux points où elle rencontrera l'axe des abscisses, on aura $y = 0$, et par conséquent

$$x^3 + px + q = 0;$$

Ce procédé a l'avantage de s'appliquer à une équation de degré quelconque.

La considération de cette famille de courbes analogues à la parabole, et qu'on appelle pour cette raison *courbes paraboliques*, peut contribuer à éclaircir la théorie des équations. On voit en effet que quelque valeur positive ou négative que l'on attribue à x, la valeur de l'ordonnée sera toujours réelle ; si donc en attribuant à x une valeur x', celle de y est positive, et qu'en attribuant à x une autre valeur x'', celle de y soit négative, il y aura un point de la courbe au-dessus de l'axe, et un point au-dessous ; et comme cette courbe est continue, elle devra nécessairement couper l'axe dans l'intervalle des deux abscisses. Donc l'*équation aura au moins une racine réelle entre* x' *et* x'' ; mais il est également facile de reconnaître que dans la même hypothèse la courbe peut rencontrer un nombre impair de fois, tandis que si les résultats étaient de même signe, la courbe ne rencontrerait point l'axe, ou la rencontrerait un nombre pair de fois ; donc, suivant que les résultats seront de même ou de différent signe, le nombre des racines sera pair ou impair.

On pourrait déduire de ces considérations d'autres théorèmes du même genre ; mais comme elles sont étrangères à notre sujet, nous ne nous y arrêterons pas.

APPENDICE.

Exemples de la discussion des équations. — Identité des courbes du second ordre avec les sections coniques.

Discussion de quelques équations.

(1) Quoiqu'il soit facile d'appliquer à une équation particulière donnée les raisonnemens du § Ier, chap. II, nous avons pensé qu'il ne serait pas inutile d'offrir ici quelques exemples de cette discussion, d'autant plus qu'après avoir acquis une connaissance plus complète des propriétés des courbes du second ordre, il est possible de tirer de ces connaissances un parti avantageux pour déterminer d'une manière précise leur position, et souvent pour les décrire, sans cesser de considérer l'équation telle qu'elle a été proposée. Nous remarquerons avant tout, que les transformations que nous avons employées au n° 31, reviennent au fond à la résolution de l'équation, et nous n'avons choisi cette marche pour le calcul, qu'afin d'éviter la complication des radicaux ; mais on peut, si on le trouve plus commode dans les exemples particuliers, appliquer directement la résolution de l'équation.

(2). Soit l'équation

$$y^2 + xy + x^2 + y + x + 1 = 0;$$

en la multipliant par 4, elle pourra se mettre sous la forme

$$(2y + x + 1)^2 + 3x^2 + 2x + 3 = 0.$$

et multipliant encore par 3, sous la suivante :

$$3(2y+x+1)^2+(3x+1)^2+8=0.$$

Comme aucune hypothèse ne peut anéantir cette équation, elle est absurde et ne représente rien.

(3). Soit 2°. l'équation

$$4y^2+8xy+8x^2+8y+36x+53=0;$$

elle se met d'abord, sans aucune préparation, sous la forme

$$4(y+x+1)^2+4x^2+28x+49=0;$$

or on voit encore que $4x^2+28x+49$ est le quarré de $2x+7$; donc cette équation peut se mettre sous la forme

$$4(y+x+1)^2+(2x+7)^2=0,$$

et comme on ne peut y satisfaire qu'en posant à-la-fois

$$y+x+1=0 \quad \text{et} \quad 2x+7=0,$$

d'où l'on tire $x=-\frac{7}{2}$, et partant $y=\frac{5}{2}$, il s'ensuit que la proposée ne donne qu'un point

(4). Soit 3°. l'équation

$$3y^2+4xy+3x^2-3y-5x-2=0;$$

en la multipliant par $4.3=12$, elle se met sous la forme

$$(6y+4x-3)^2+20x^2-36x-33=0:$$

comme 20 et 36 sont divisibles par 4, il suffira de multiplier par 5 pour transformer cette dernière équation en

$$5(6y+4x-3)^2+(10x-9)^2-246=0.$$

On tire de là, par la résolution,

$$y=-\frac{4x-3}{6}\pm\frac{1}{6\sqrt{5}}\sqrt{\{246-(10x-9)^2\}}.$$

Cette valeur de y ne sera réelle qu'autant qu'on aura..... $(10x-9)^2 = 246$, ou < 246. L'équation $(10x-9)^2 = 246$ donne

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{246}}{10},$$

dont une des valeurs est positive, et l'autre est négative; représentons-les par α et $-\beta$, le polynome $(10x-9)^2 - 246$ sera égal à $(x-\alpha)(x+\beta)$. Or comme il doit être négatif, s'il n'est pas nul, il est manifeste que les valeurs positives de x devront être prises plus petites que α, et que les valeurs négatives devront être prises plus petites que β; donc la courbe est limitée dans le sens de l'axe des abscisses: la plus grande valeur du radical est $\sqrt{246}$; ainsi elle est limitée également dans le sens de l'axe des ordonnées, la courbe est donc une *ellipse*. Le diamètre qui coupe en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des ordonnées, a pour équation

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2};$$

ainsi il fait avec celui des abscisses un angle dont la tangente est $-\frac{2}{3}$, et l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2}$. L'ellipse rencontre ce diamètre aux points dont les abscisses sont

$$\frac{9+\sqrt{246}}{10} \quad \text{et} \quad \frac{9-\sqrt{246}}{10},$$

les ordonnées de ces points sont faciles à calculer, et partant, la longueur du diamètre. Si l'on cherche l'ordonnée qui coupe ce diamètre en deux parties égales, c'est-à-dire celle qui correspond à la valeur de x donnée par l'hypothèse $x = \frac{9}{10}$, on en trouve deux, et leur différence donne le diamètre conjugué (n° 40). D'ailleurs l'angle de ces deux diamètres est le complément de celui que fait le premier avec l'axe des abscisses, et partant il a pour tangente $\frac{3}{2}$. On connaît donc deux diamètres, et l'angle qu'ils font entre eux; il est facile, d'après

cela, (n° 60. 3°.) de calculer la longueur et la direction des axes principaux.

(5). Soit l'équation

$$y^2 + 2xy + x^2 + 2y + x + 3 = 0,$$

elle peut se mettre sous la forme

$$(y + x + 1)^2 - x + 2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = -x - 1 \pm \sqrt{(x - 2)};$$

tant que l'on prendra x négatif, ou positif plus petit que 2, l'ordonnée sera imaginaire; la courbe ne commence donc qu'au point où $x = 2$, qui donne $y = -3$. Toute autre valeur de x donne une valeur réelle pour y. Le diamètre qui coupe en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des ordonnées, a pour équation

$$y = -x - 1,$$

et rencontre par conséquent cet axe au point dont l'ordonnée est -1, en faisant un angle de 50° (nouvelle division), et la courbe qui est, comme on le sait, une parabole, s'écarte de plus en plus de ce diamètre tant en dessus qu'en dessous. D'ailleurs l'ordonnée qui correspond à l'abscisse 2 est tangente, et le diamètre fait avec elle un angle de 50°; l'équation de cette parabole rapportée au diamètre et à la tangente, sera (n° 96) de la forme

$$u^2 = 4mt,$$

dans laquelle il ne reste qu'à déterminer m. Or si l'on fait $x = 3$, on a pour les ordonnées correspondantes de la courbe, $y = -3$ et $y = -5$. La moitié de la corde est égale à 1, et la partie du diamètre interceptée se calcule facilement, et se trouve égale à $\sqrt{2}$; cette partie est la valeur de t, tandis

que la demi-corde est la valeur correspondante de u ; on aura donc $1 = 4m\sqrt{2}$, ou $m = \frac{1}{4\sqrt{2}}$. Une fois que m est connu, il est facile de calculer les élémens nécessaires pour déterminer l'axe principal et l'équation de la courbe rapportée à cet axe. (*Voyez* n° 98.)

(6). Nous ne nous arrêterons pas ainsi successivement à tous les cas qui peuvent se présenter, et nous finirons par considérer les deux équations

$$y^2 + xy - 2x^2 - x + 3 = 0,$$
$$2xy - 3y - 4x + 7 = 0;$$

la première multipliée par 4 peut se mettre sous la forme

$$(2y + x)^2 - 9x^2 - 4x + 12 = 0,$$

et ensuite, en multipliant par 9, sous la suivante :

$$9(2y + x)^2 - (9x + 2)^2 + 112 = 0,$$

on reconnaîtra facilement que la courbe est une hyperbole. Le diamètre a pour équation

$$y = -\frac{x}{2},$$

et le conjugué parallèle à l'axe des ordonnées rencontre celui des abscisses au point dont l'abscisse est $x = -\frac{2}{9}$; la courbe est rencontrée par le premier. On pourra calculer la longueur de celui-ci, regarder comme réelle la longueur imaginaire que le calcul donnera pour l'autre, et en achevant comme pour l'ellipse, on obtiendra l'équation de l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués, et de là on pourra trouver les axes.

Mais on peut, comme on l'a vu (n° 34), déduire de l'équation proposée celle des asymptotes. En divisant par $(9x + 2)^2$, on trouve

$$9\left(\frac{2y + x}{9x + 2}\right)^2 - 1 + \frac{112}{(9x + 2)^2} = 0.$$

Or plus on augmente la valeur de x, plus le dernier terme $\frac{212}{(9x+2)^2}$ diminue, de sorte que l'équation approche sans cesse de devenir

$$9\left(\frac{2y+x}{9x+2}\right)^2 - 1 = 0;$$

qui donne

$$\frac{2y+x}{9x+2} = \pm\frac{1}{3}, \text{ ou } y = \frac{\pm 9 - 3}{6}x \pm \frac{2}{6},$$

équation des deux asymptotes. La première fait un angle dont la tangente est 1, c'est-à-dire un angle de 50°, et la seconde un angle dont la tangente est — 2. On trouvera facilement que l'angle qu'elles font entre elles a pour tangente..... $\frac{-2-1}{1-2.1} = 3.$

La seconde équation donne

$$y = \frac{4x-7}{2x-3} = 2 - \frac{1}{2x-3};$$

elle appartient encore évidemment à l'hyperbole, et les asymptotes qui sont parallèles aux axes ont pour équations

$$y = 2, \quad 2x = 3.$$

D'ailleurs l'équation de la courbe donne $y = 1$, pour $x = 2$; ainsi l'on pourra la construire par la propriété du n°. 89. Si l'on partage l'angle des asymptotes en deux parties égales, on aura la direction du premier axe.

Identité des courbes du second ordre avec les sections faites par un plan dans un cône quelconque circulaire.

(7). On sait par la Géométrie, que l'on doit entendre par surface conique, celle qui est engendrée par une droite as-

treinte à passer par un point fixe, et qui glisse sur une courbe nommée *directrice;* la droite prend le nom de *génératrice.* Le cône est dit *circulaire*, qnand la génératrice est un cercle. Le point fixe est le *centre* de la surface, et les deux parties qui sont opposées se nomment *nappes.*

On démontre en Géométrie, que toute section faite dans nn cône circulaire, par un plan qui passe par le centre, est le système de deux lignes droites, tandis que celle qui est faite par un plan parallèle à la circonférence directrice, est un cercle.

Soit le cône SAB (fig. 53, 54, 55), et $ANBN'$ la circonférence directrice, que GH soit l'intersection du plan coupant avec celui de la directrice; si l'on mène par le centre C de cette dernière un diamètre $BCAK$, perpendiculaire sur GH, le sommet S et le diamètre AB détermineront un plan qui coupera le cône suivant les droites SA, SB, et le plan coupant suivant une droite KD, D étant nn certain point de la section conique. Cela posé, si dans le plan SAB, et par le point D, on mène une droite DI parallèle à l'arête SA, il peut arriver trois cas : le point I pent être à la droite du point K, se confondre avec lui, ou le laisser à sa droite.

1°. Si le point I est à droite dn point K (fig. 53), la droite DK rencontrera l'arête SA en un certain point E, le plan traversera la nappe inférieure de la surface conique, et il est d'abord évident que l'intersection sera une courbe fermée. D'ailleurs si par un point M de cette intersection, on mène un plan parallèle à celni de la directrice, il coupera la surface conique suivant une circonférence de cercle, le plan SAB suivant la droite ab qui sera un diamètre, et la section en un autre point M'. Si P est l'intersection du diamètre ab et de la droite DE, les trois points M, P, M' seront évidemment en ligne droite, puisqu'ils se trouvent tous les trois à-la-fois dans le plan de la section et dans le plan circulaire : la droite MPM' est aussi perpendiculaire à ab, puisqu'elles sont respectivement parallèles à GH et BK; et comme, d'après cela, on a $MP = M'P$, et que la même chose aurait lieu, quelque

part que fût mené le plan circulaire, il s'ensuit que DE est un diamètre de la section conique. Mais par la propriété du cercle on a $\overline{MP}^2 = aP.bP$, et il est facile d'en déduire l'équation de la courbe. Si l'on prend en effet l'origine au milieu O de la droite DE que nous représenterons par $2m$, que l'on fasse $OP = t$, $MP = u$, on aura $EP = m + t$, $DP = m - t$. Les triangles semblables aPE, AEK, donnent

$$aP : EP :: AK : EK, \text{ d'où } aP = \frac{AK}{EK}(m + t).$$

Les triangles semblables DPb, DKB donnent

$$bP : DP :: BK : DK, \text{ d'où } bP = \frac{BK}{DK}(m - t),$$

et partant

$$u^2 = \frac{AK.BK}{EK.DK}(m^2 - t^2).$$

Or AK, BK, EK, DK sont des quantités connues et calculables, et l'équation précédente est celle d'une *ellipse* rapportée à deux diamètres conjugués; donc la section est une *ellipse*.

Si l'on avait $AK.BK = EK.DK$, et que GK fût perpendiculaire sur BK, l'équation deviendrait

$$u^2 = m^2 - t^2,$$

et les coordonnées étant rectangulaires, elle appartient à une circonférence de cercle. Or l'hypothèse $AK.BK = EK.DK$ donne la proportion $AK : EK :: DK : BK$; ainsi les deux triangles EKA, DKB ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels, par conséquent ils sont semblables, et l'angle AEK est égal à l'angle B; donc aussi l'angle SED est égal à l'angle B, c'est-à-dire, que les droites AB et DE sont ce qu'on appelle *anti-parallèles*. La condition que GH soit perpendiculaire sur DK, exige que GH soit perpendiculaire sur le plan SAB, et par conséquent que le plan de la directrice

le soit sur ce premier, ou plutôt que le plan SAB soit perpendiculaire sur celui de la directrice. Le plan SAB doit donc être celui qui passe par la perpendiculaire abaissée du sommet sur la directrice : ce plan une fois déterminé, si l'ou élève une perpendiculaire sur le diamètre AB par un point quelconque situé à la gauche du point I, et que par le point K on mène, dans le plan SAB, KD anti-parallèle à AB, le plan déterminé par les droites GH et KD coupera le cône suivant un cercle ; il est évident que toutes les autres sections analogues seront fournies par des parallèles à celui-là.

2°. Si le point I se confond avec le point K (fig. 54), le plan coupant ne rencontrera pas la nappe supérieure du cône : en effet il est parallèle au plan mené par l'arête SA et par la droite qui touche la directrice au point A, et ce dernier plan, que l'on nomme *plan tangent*, n'a évidemment de commun avec le cône que la droite ASA' ; donc aussi le plan coupant ne traverse pas la nappe inférieure du cône ; d'où l'on peut voir que la section est une courbe indéfinie dans un sens. Si l'on fait la même construction que dans le cas précédent, on aura de même $\overline{MP}^2 = aP \cdot bP$; prenant l'origine au point D, et faisant $DP = t$, on aura d'abord $AP = AK$, et ensuite les triangles semblables DPb, DKB donnent

$$bP : DP :: BK : DK, \text{ d'où } bP = \frac{BK}{DK}t,$$

et partant

$$u^2 = \frac{AK \cdot BK}{DK}t,$$

équation d'une parabole rapportée à un diamètre.

3°. Si le point I est à gauche du point K (fig. 55), la droite DK prolongée rencontrera nécessairement le prolongement SA' de l'arête SA en un point E, et partant le plan coupant rencontre les deux nappes du cône ; et comme dans ce cas il ne peut traverser ni l'une ni l'autre, on peut voir d'avance que la section est une courbe composée de deux

parties séparées qui s'étendent à l'infini. D'ailleurs en faisant toujours la même construction, prenant l'origine au point O milieu de DE; faisant $DE = 2m$, $OP = t$, $MP = u$, on a $u^2 = aP.bP$; et les triangles semblables aEP, aEK d'une part, bDP, BDK de l'autre, donnent

$$aP : EP :: AK : EK, \quad bP : DP :: BK : DK,$$

d'où, puisque $EP = m + t$, $DP = t - m$,

$$aP = \frac{AK}{EK}(t+m), \quad bP = \frac{BK}{DK}(t-m),$$

et partant

$$u^2 = \frac{AK.BK}{EK.DK}(t^2 - m^2),$$

équation d'une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.

FIN.

609133
BN

Fig. 2.

Fig. 3.

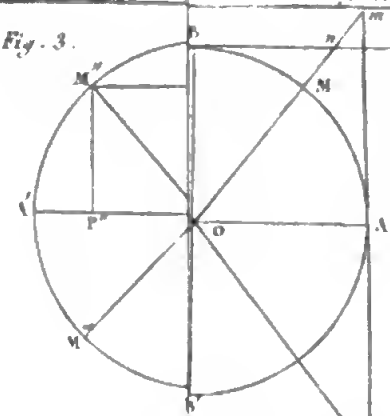
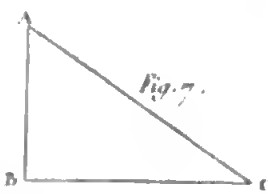


Fig. 4.

Fig. 7.



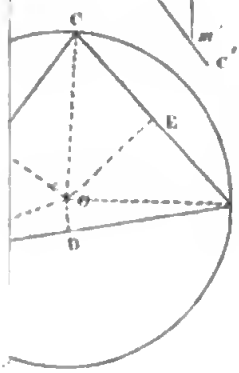


Fig. 9.

Fig. 11.

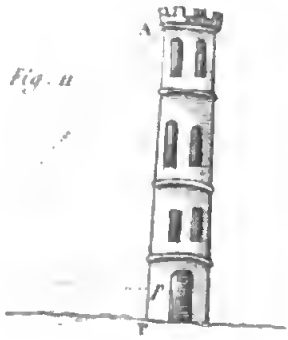


Fig. 12.

Fig. 13.

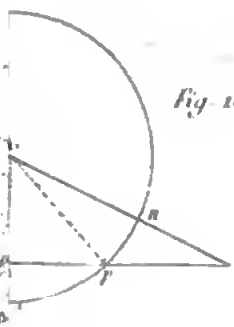


Fig. 14.

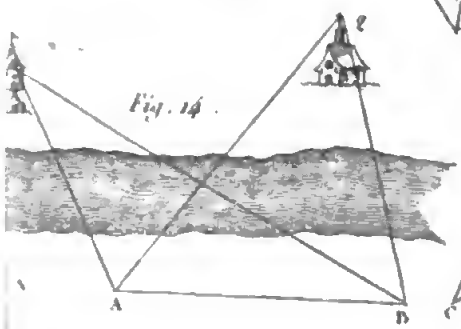
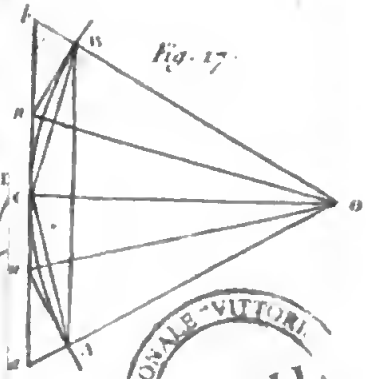


Fig. 17.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO
NAPOLI

Fig. 2.

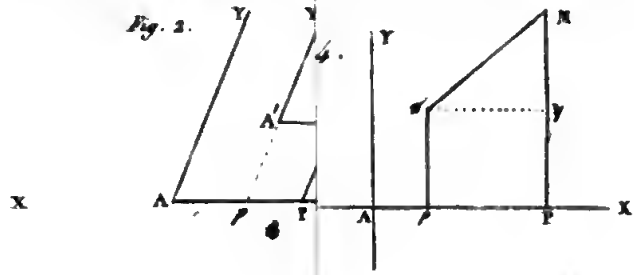
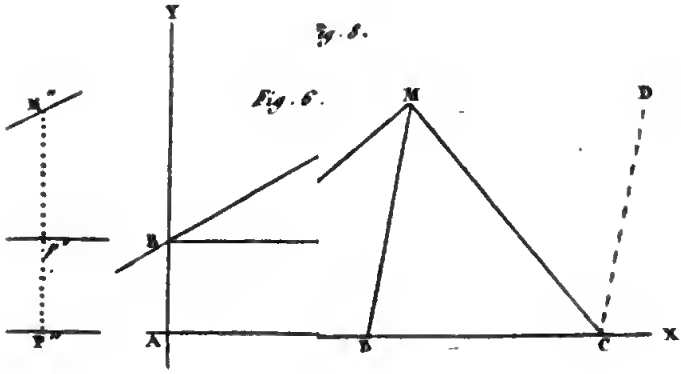


Fig. 5.



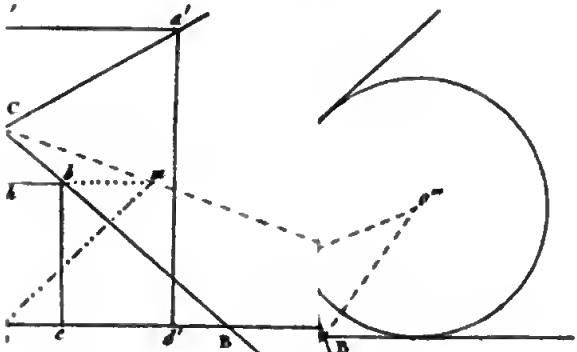


Fig. 11.

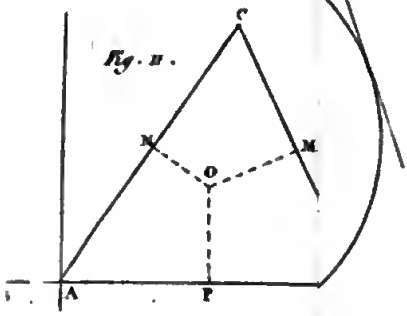
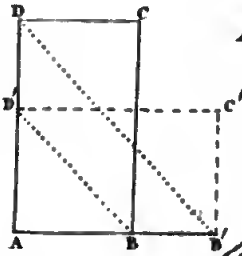


Fig. 13.



BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE - NAPOLI

Fig.

Fig. 17.

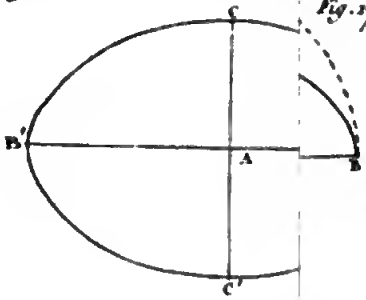


Fig. 18.

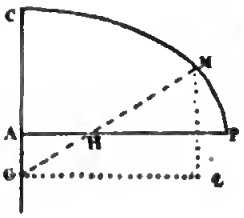


Fig. 21.

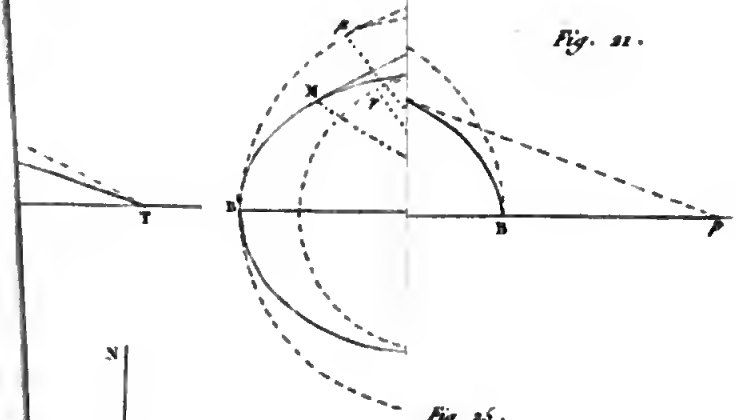


Fig 25.

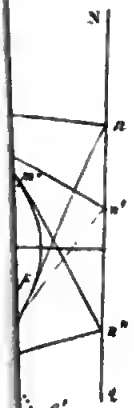


Fig 23.

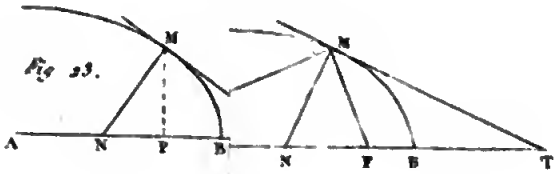


Fig. 27.

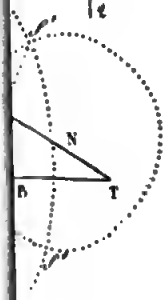
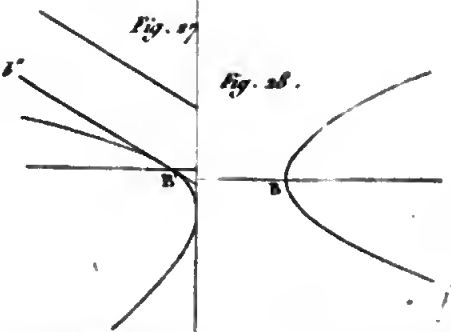


Fig. 28.



NAPOLI

Fig . 30 .

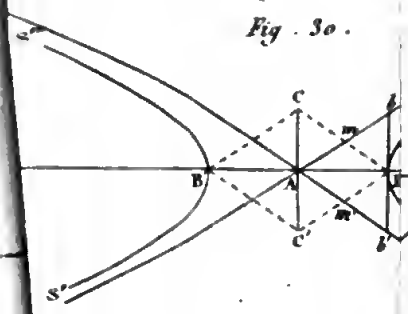


Fig . 32 .

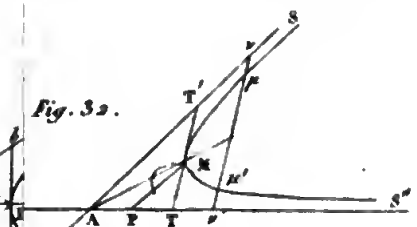


Fig . 34 .

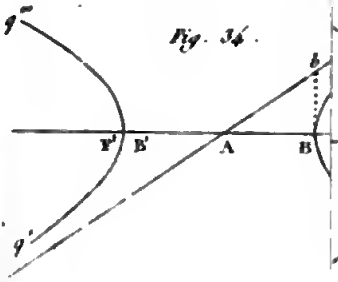


Fig . 36 .

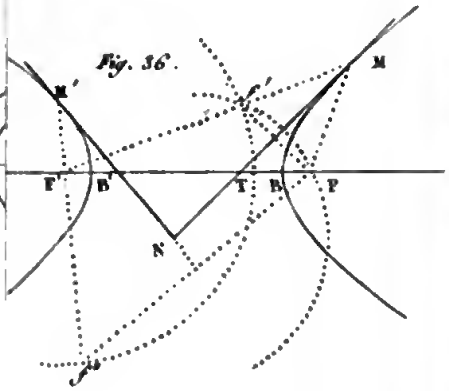


Fig . 38 .

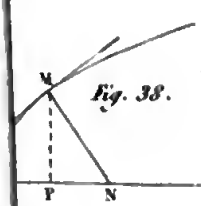
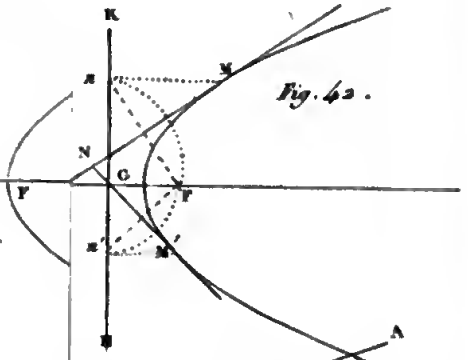
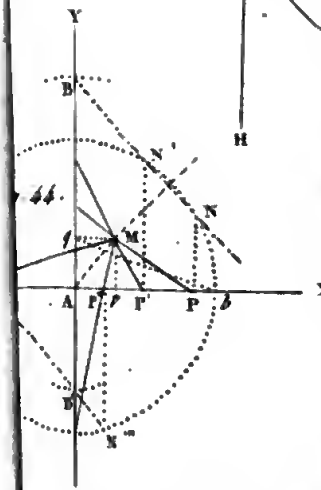
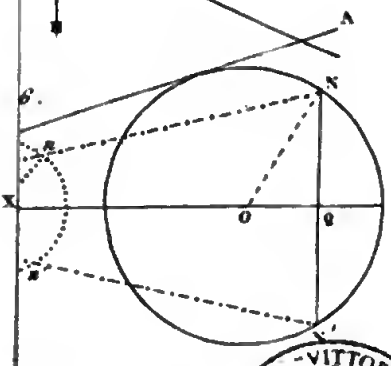


Fig . 42 .

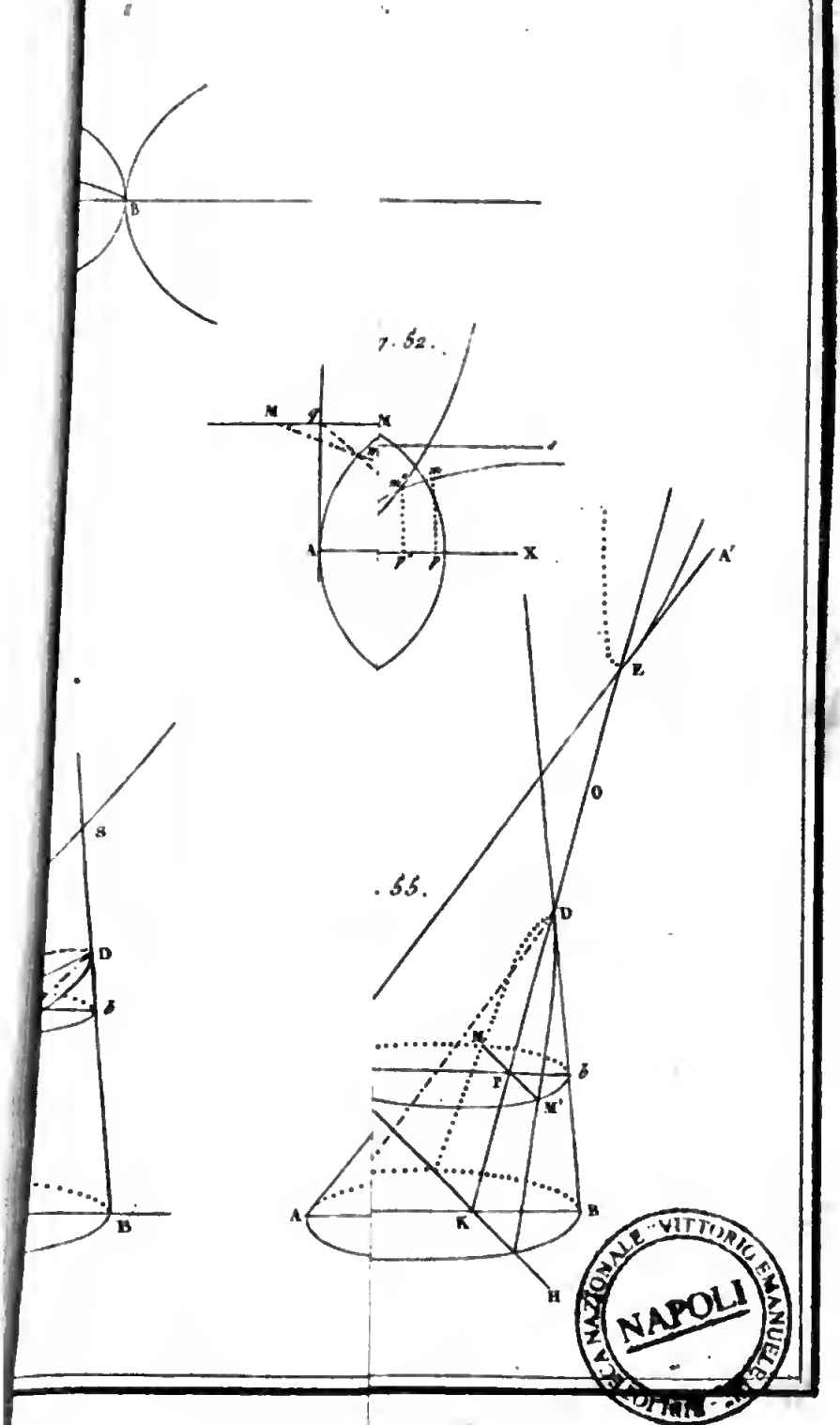


44 .





BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI